

Problema n. 1: CURVA NORD

Sei il responsabile della gestione del settore “Curva Nord” dell’impianto sportivo della tua città e devi organizzare tutti i servizi relativi all’ingresso e all’uscita degli spettatori, nonché alla sicurezza e all’assistenza agli spettatori stessi. La forma del settore sotto la tua gestione è una porzione di corona circolare come rappresentata in figura 1.

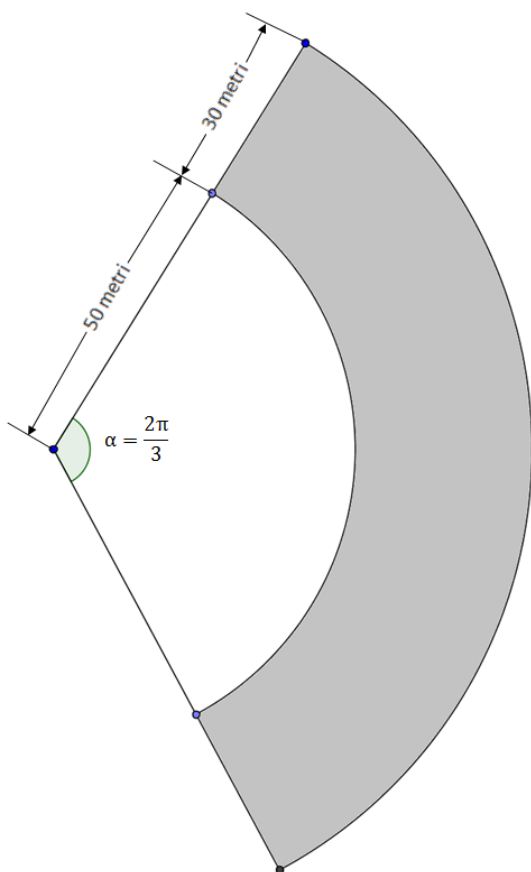


Figura 1

Tenendo presente che le normative di sicurezza emanate dal Comune prevedono un indice di affollamento massimo di $3,25$ persone/ m^2 , e che il $9,5\%$ della superficie della “Curva Nord” è inagibile in quanto necessita di lavori di manutenzione,

- 1) determina la capienza massima N_{max} attuale del settore “Curva Nord”, approssimata alle centinaia.

La Polizia Municipale propone di aprire i cancelli di ingresso un’ora prima dell’inizio della manifestazione sportiva. È necessario non aprirli con troppo anticipo, per limitare i costi, ma anche evitare un afflusso troppo intenso, per motivi di sicurezza: la velocità massima di accesso degli spettatori non deve essere superiore a 350 ingressi al minuto. In base alle osservazioni degli anni precedenti, sai che l’andamento del numero di spettatori, aprendo gli ingressi un’ora prima dell’inizio della manifestazione, segue una curva come quella riportata in figura 2:

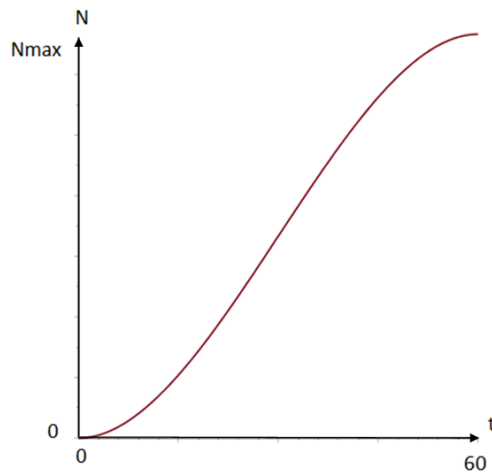


Figura 2

- 2) esprimendo il tempo t in minuti, determina il polinomio $p(t)$ di terzo grado che meglio riproduce questo andamento, ipotizzando che il numero di spettatori sia 0 all'apertura dei cancelli di ingresso ($t = 0$) e sia pari al numero massimo consentito N_{max} dopo un'ora ($t = 60$), e che la velocità di accesso sia 0 al momento dell'apertura iniziale degli ingressi, e sia ancora 0 dopo un'ora, quando l'afflusso termina e il settore è riempito completamente. Verifica che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso degli spettatori nello stadio.

Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.

- 3) Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con $t=0$ l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $[0; t_c]$; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

Devi organizzare i servizi di assistenza e ristoro per gli spettatori, sulla base del numero medio di presenze nell'impianto.

- 4) Determina il numero medio di spettatori presenti nell'impianto, nell'intervallo di tempo dall'istante $t = 0$ (apertura dei cancelli) all'istante $t = t_c$

Problema n. 2: Il VASO

L'azienda in cui lavori produce articoli da giardino e sei stato incaricato di rivedere il disegno di un vaso portafiori realizzato da un tuo collega. Il vaso, di altezza $h = 18$ cm, è composto da due tronchi di cono aventi la base maggiore in comune e il disegno che ti è stato fornito (figura 1) ne rappresenta la sezione longitudinale:

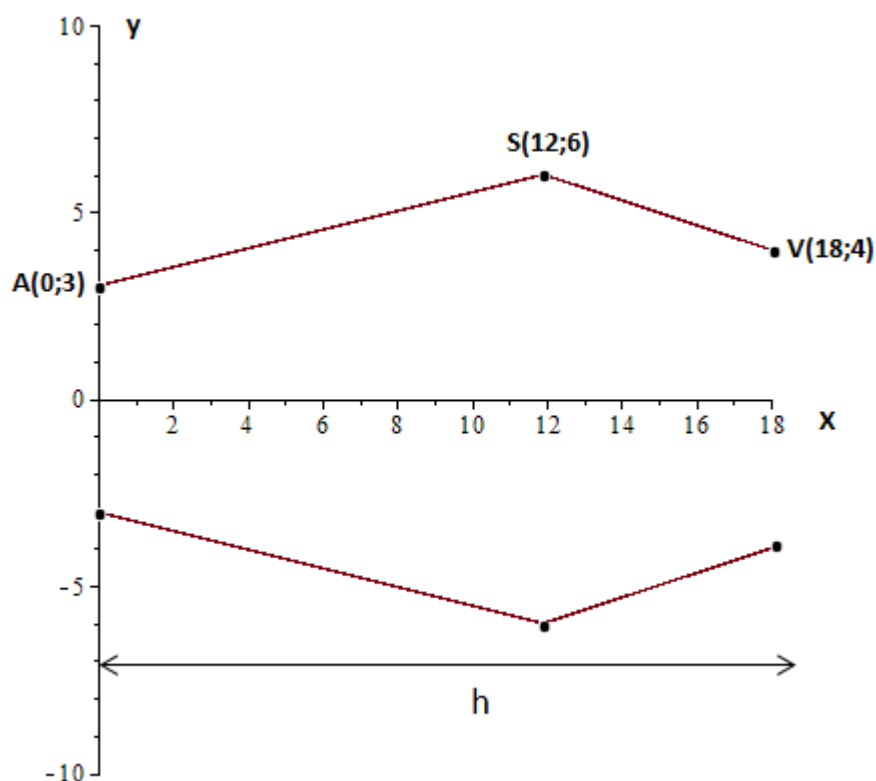


Figura 1

Nel riferimento cartesiano utilizzato in figura 1 l'unità corrisponde a 1 cm. Il direttore del tuo reparto ti chiede di:

- 1) verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.

Se il volume risulta minore di 1,5 litri, bisogna rendere il vaso più alto, fino a fargli raggiungere il volume di 1,5 litri, lasciando però invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A, S e V, rendendo inoltre la forma meno spigolosa. Per chiarire meglio la sua richiesta, il direttore ti dà un suo disegno, modificato rispetto al precedente (figura 2).

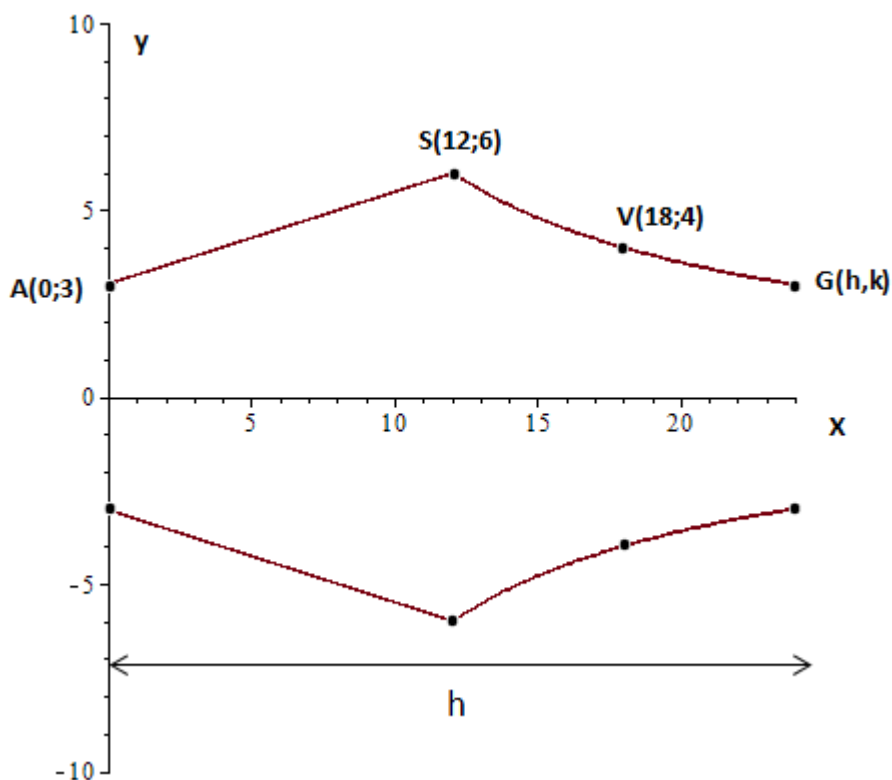


Figura 2

La curva passante per i punti S, V e G, disegnata dal direttore, può essere approssimata con un'iperbole di equazione $y=a/x$.

2) Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori delle coordinate h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.

Dopo che un primo esemplare del vaso è stato prodotto, il responsabile della produzione fa rilevare che l'eccessiva spigolosità del profilo del vaso nel punto S ne rende costosa la produzione.

3) Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano $y \geq 0$; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;

4) lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A e S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiungere i punti A e S, eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

Sezione Quesiti

QUESITO 1

Assegnata la funzione

$$y = e^{x^3} - 8$$

1) verificare che è invertibile;

2) stabilire se la funzione inversa f^{-1} è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione, giustificando la risposta.

QUESITO 2

Data l'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = \frac{1}{2x - 1}$$

determinare la soluzione del problema di Cauchy, tenendo conto della condizione iniziale $y(1) = 0$

QUESITO 3

Di quale delle seguenti equazioni differenziali è soluzione la funzione $y = \ln(x - 3)$?

a) $(x - 3) \cdot y'' - (x - 3)^2 \cdot y' + 2 = 0$

b) $x \cdot y'' - (x - 3) \cdot y' + x + 2 = 0$

c) $(x - 3)^2 \cdot y'' - (x - 3) \cdot y' + 2 = 0$

d) $x^2 \cdot y'' + y' + 3 \cdot x - 9 = 0$

Giustificare la risposta.

QUESITO 4

Verificare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}$ e, nel caso in cui sia convergente, determinare la sua somma.

QUESITO 5

Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri.

Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta.

QUESITO 6

La base di un solido, nel piano Oxy , è il cerchio avente come centro l'origine e raggio 3. Le sezioni del solido perpendicolari all'asse delle x sono quadrati.

Calcolare il volume del solido.

QUESITO 7

Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate $(1,1,z)$, con z negativa.

QUESITO 8

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (\arcsin(x) + \arccos(x)) dx$$

e rappresentare graficamente la funzione primitiva passante per il punto $\left(\frac{2}{\pi}, 2\right)$.

QUESITO 9

Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)} dx$$

QUESITO 10

In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti due treni.

Determinare la probabilità che in 20 minuti:

- a) non arrivi alcun treno;
- b) ne arrivi uno solo;
- c) ne arrivino al massimo quattro.

ISTRUZIONI per la compilazione

La griglia si compone di due parti, una (sezione A) relativa alla valutazione del problema scelto dallo studente, e una (sezione B) relativa alla valutazione dei quesiti.

Gli indicatori della griglia della **sezione A** si riferiscono alla valutazione della **competenza in matematica** e sono descritti in quattro livelli, a ciascun livello sono assegnati dei punteggi, il valor minimo del punteggio totale della sezione A è 0 e il massimo è 75. **I problemi sono di tipo contestualizzato** ed è richiesto allo studente di rispondere a **4 quesiti** che rappresentano le **evidenze** rispetto alle quali si applicano **i quattro indicatori di valutazione**:

1. lo studente **comprende** il contesto generale ed anche i contesti particolari rispetto a cui si formulano i quesiti e riesce a **tradurre le richieste in linguaggio matematico**, secondo 4 livelli di prestazione (L1, L2, L3, L4 in ordine crescente) ai quali è assegnato un punteggio all'interno della fascia;
2. lo studente **individua le strategie risolutive** più adatte alle richieste e alle sue scelte secondo 4 livelli di prestazione (L1, L2, L3, L4 in ordine crescente) ai quali è assegnato un punteggio all'interno della fascia;
3. lo studente **porta a termine i processi risolutivi ed i calcoli** per ottenere il risultato di ogni singola richiesta secondo 4 livelli di prestazione (L1, L2, L3, L4 in ordine crescente) ai quali è assegnato un punteggio all'interno della fascia;
4. lo studente **giustifica le scelte** che ha adottato secondo 4 livelli di prestazione (L1, L2, L3, L4 in ordine crescente) ai quali è assegnato un punteggio all'interno della fascia.

La griglia della **sezione B** ha indicatori che **afferiscono alla sfera della conoscenza e dell'abilità di applicazione di procedure risolutive e di calcolo**, è stabilita la fascia di punteggio per ogni indicatore e per ogni quesito. Il totale del punteggio per ogni quesito è 15, e dovendone lo studente risolvere 5 su 10, il punteggio totale di questa sezione è 75 (**quindi le due sezioni hanno lo stesso peso**).

Infine è fornita la scala di conversione dal punteggio (max 150) al voto in quindicesimi (max 15/15).

Griglia di valutazione

Sezione A: problema

INDICATORI	LIVELLO	DESCRITTORI	Punti	Problemi	
				P1	P2
Comprendere Analizzare la situazione problematica, identificare i dati, interpretarli e formalizzarli in linguaggio matematico.	L1	Non comprende le richieste o le recepisce in maniera inesatta o parziale, non riuscendo a riconoscere i concetti chiave e le informazioni essenziali, o, pur avendone individuati alcuni, non li interpreta correttamente. Non stabilisce gli opportuni collegamenti tra le informazioni e utilizza i codici matematici in maniera insufficiente e/o con gravi errori.	0-4		
	L2	Analizza ed interpreta le richieste in maniera parziale, riuscendo a selezionare solo alcuni dei concetti chiave e delle informazioni essenziali, o, pur avendoli individuati tutti, commette qualche errore nell'interpretarne alcuni, nello stabilire i collegamenti e/o nell'utilizzare i codici matematici.	5-9		
	L3	Analizza in modo adeguato la situazione problematica, individuando e interpretando correttamente i concetti chiave, le informazioni e le relazioni tra queste riconoscendo ed ignorando gli eventuali distrattori; utilizza con adeguata padronanza i codici matematici grafico-simbolici, nonostante lievi inesattezze e/o errori.	10-15		
	L4	Analizza ed interpreta in modo completo e pertinente i concetti chiave, le informazioni essenziali e le relazioni tra queste, ignorando gli eventuali distrattori; utilizza i codici matematici grafico-simbolici con buona padronanza e precisione.	16-18		
Individuare Mettere in campo strategie risolutive attraverso una modellizzazione del problema e individuare la strategia più adatta.	L1	Non individua strategie di lavoro o ne individua di non adeguate Non è in grado di individuare modelli standard pertinenti. Non si coglie alcuno spunto creativo nell'individuare il procedimento risolutivo. Non individua gli strumenti formali opportuni.	0-4		
	L2	Individua strategie di lavoro poco efficaci, talora sviluppandole in modo poco coerente; ed usa con una certa difficoltà i modelli noti. Dimostra una scarsa creatività nell'impostare le varie fasi del lavoro. Individua con difficoltà e qualche errore gli strumenti formali opportuni.	5-10		
	L3	Sa individuare delle strategie risolutive, anche se non sempre le più adeguate ed efficienti. Dimostra di conoscere le procedure consuete ed i possibili modelli trattati in classe e li utilizza in modo adeguato. Individua gli strumenti di lavoro formali opportuni anche se con qualche incertezza.	11-16		
	L4	Attraverso congetture effettua, con padronanza, chiari collegamenti logici. Individua strategie di lavoro adeguate ed efficienti. Utilizza nel modo migliore i modelli noti e ne propone di nuovi. Dimostra originalità e creatività nell'impostare le varie fasi di lavoro. Individua con cura e precisione le procedure ottimali e non standard.	17-21		
Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.	L1	Non applica le strategie scelte o le applica in maniera non corretta. Non sviluppa il processo risolutivo o lo sviluppa in modo incompleto e/o errato. Non è in grado di utilizzare procedure e/o teoremi o li applica in modo errato e/o con numerosi errori nei calcoli. La soluzione ottenuta non è coerente con il contesto del problema.	0-4		
	L2	Applica le strategie scelte in maniera parziale e non sempre appropriata. Sviluppa il processo risolutivo in modo incompleto. Non sempre è in grado di utilizzare procedure e/o teoremi o li applica in modo parzialmente corretto e/o con numerosi errori nei calcoli. La soluzione ottenuta è coerente solo in parte con il contesto del problema.	5-10		
	L3	Applica le strategie scelte in maniera corretta pur con qualche imprecisione. Sviluppa il processo risolutivo quasi completamente. È in grado di utilizzare procedure e/o teoremi o regole e li applica quasi sempre in modo corretto e appropriato. Commette qualche errore nei calcoli. La soluzione ottenuta è generalmente coerente con il contesto del problema.	11-16		
	L4	Applica le strategie scelte in maniera corretta supportandole anche con l'uso di modelli e/o diagrammi e/o simboli. Sviluppa il processo risolutivo in modo analitico, completo, chiaro e corretto. Applica procedure e/o teoremi o regole in modo corretto e appropriato, con abilità e con spunti di originalità. Esegue i calcoli in modo accurato, la soluzione è ragionevole e coerente con il contesto del problema.	17-21		
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia applicata, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati.	L1	Non argomenta o argomenta in modo errato la strategia/procedura risolutiva e la fase di verifica, utilizzando un linguaggio matematico non appropriato o molto impreciso.	0-3		
	L2	Argomenta in maniera frammentaria e/o non sempre coerente la strategia/procedura esecutiva o la fase di verifica. Utilizza un linguaggio matematico per lo più appropriato, ma non sempre rigoroso.	4-7		
	L3	Argomenta in modo coerente ma incompleto la procedura esecutiva e la fase di verifica. Spiega la risposta, ma non le strategie risolutive adottate (o viceversa). Utilizza un linguaggio matematico pertinente ma con qualche incertezza.	8-11		
	L4	Argomenta in modo coerente, preciso e accurato, approfondito ed esaustivo tanto le strategie adottate quanto la soluzione ottenuta. Mostra un'ottima padronanza nell'utilizzo del linguaggio scientifico.	12-15		
			Tot		

Sezione B: quesiti

CRITERI	Quesiti (Valore massimo attribuibile 75/150 = 15x5)										P.T.
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	
COMPRESIONE e CONOSCENZA <i>Comprensione della richiesta.</i> <i>Conoscenza dei contenuti matematici.</i>	(0-4)	(0-3)	(0-3)	(0-5)	(0-5)	(0-3)	(0-4)	(0-6)	(0-5)	(0-6)	
ABILITA' LOGICHE e RISOLUTIVE <i>Abilità di analisi.</i> <i>Uso di linguaggio appropriato.</i> <i>Scelta di strategie risolutive adeguate.</i>	(0-4)	(0-5)	(0-4)	(0-3)	(0-5)	(0-6)	(0-4)	(0-5)	(0-5)	(0-5)	
CORRETTEZZA dello SVOLGIMENTO <i>Correttezza nei calcoli.</i> <i>Correttezza nell'applicazione di Tecniche e Procedure anche grafiche.</i>	(0-3)	(0-5)	(0-4)	(0-5)	(0-3)	(0-3)	(0-5)	(0-2)	(0-5)	(0-2)	
ARGOMENTAZIONE <i>Giustificazione e Commento delle scelte effettuate.</i>	(0-4)	(0-2)	(0-4)	(0-2)	(0-2)	(0-3)	(0-2)	(0-2)	(0-0)	(0-2)	
<i>Punteggio totale quesiti</i>											

Calcolo del punteggio Totale

PUNTEGGIO SEZIONE A (PROBLEMA)	PUNTEGGIO SEZIONE B (QUESITI)	PUNTEGGIO TOTALE (SEZIONE A + SEZIONE B)

Tabella di conversione dal punteggio grezzo al voto in quindicesimi

<i>Punti</i>	0-4	5-10	11-18	19-26	27-34	35-43	44-53	54-63	64-74	75-85	86-97	98-109	110-123	124-137	138-150
<i>Voto</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Voto assegnato ____ /15

Il docente
