PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

27 novembre 2013

1) *Die Arbeit besteht aus 20 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben A, B, C, D, E gekennzeichnet.*
2) *Nur eine dieser Antworten ist richtig, die anderen vier sind falsch. Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.*
3) *Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. DIE BENUTZUNG EINES TASCHENRECHNERS IST NICHT GESTATTET.*

Für die gesamte Arbeit stehen dir 120 Minuten zur Verfügung.

Gute Arbeit und viel Vergnügen!

Vorname:_________________________Nachname____________________Klasse:____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

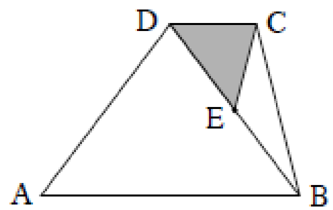
1) Bis 2013 bestand die Bevölkerung der Gefangenenkolonie von Zoranel zu 60 % aus Robotern, 5 % davon waren für die Bewachung zuständig. Bezeichnen wir mit q den prozentuellen Anteil der Bewachungsroboter bezogen auf die Gesamtbevölkerung jenes Jahres. 2014 ist die Bevölkerung der Gefangenenkolonie um 10 % angestiegen, da N verbannte Personen aufgenommen wurden. Um wie viel verringerte sich der prozentuelle Anteil der Bewachungsroboter bezogen auf die Gesamtbevölkerung?
(A) er änderte sich nicht **(B)** weniger als ein Zehntel von q **(C)** mehr als ein Zehntel von q **(D)** hängt von N ab **(E)** hängt von der Größe der Anfangsbevölkerung ab.

2) Leo wirft 7 Mal eine – nicht gezinkte – Münze und erhält zwei Mal Kopf und fünf Mal Zahl. Wenn er die Münze nochmals wirft, so ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf
(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $1-\frac{1}{2^7}$ **(D)** $\frac{35}{2^7}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

3) Sei f eine ungerade Funktion, d.h. es gilt $f(x)=-f(-x)$ für alle x .Welche der folgenden Funktionen ist sicher ungerade?
(A) $f(x)-1$ **(B)** $(f(x))^2$ **(C)** $(f(x))^2+f(x)$ **(D)** $(f(x))^3+1$
(E) $(f(x))^3+f(x)$

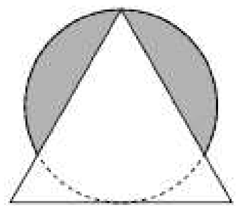
4) Wie viel ergibt $\log_2(3)\cdot\log_3(4)\cdot\log_4(5)\cdot\ldots\cdot\log_{126}(127)\cdot\log_{127}(128)$?
(A)1 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** keine der vorhergehenden Antworten.

5) In einem Trapez *ABCD* misst die längere Grundseite *AB* das Dreifache der kürzeren Grundseite *CD*. Sei *E* der Mittelpunkt der Diagonalen *BD*. Wie groß ist das Verhältnis zwischen der Fläche des Dreiecks *CDE* und der Fläche des Trapezes?



(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{12}$
(E) kann aus den angegebenen Daten nicht bestimmt werden.

6) Eine Skulptur moderner Kunst zeigt einen Kreis, der zum Teil von einem gleichseitigen Dreieck verdeckt wird (wie in der Abbildung). Der Durchmesser des Kreises ist gleich groß wie die Höhe des Dreiecks, welche $\sqrt{6}$ m misst. Wie groß ist der Flächenanteil des Kreises, welcher nicht vom Dreieck verdeckt wird?



(A) $(\frac{3}{2}\pi-\frac{8}{\sqrt{3}})$ m² **(B)** $\frac{\pi}{2}$ m² **(C)** $(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4})$ m²
(D) $(\frac{3}{2}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8})$ m² **(E)** $\frac{3}{2}\pi$ m²

7) Wie lange ist der kürzeste Weg, der durch alle Eckpunkte eines Würfels mit Kantenlänge 1 m verläuft? N.B. Der Weg kann auch im Inneren des Würfels verlaufen.
(A) 6 m **(B)** 7 m **(C)** $(6+\sqrt{2})$ m **(D)** $(6+\sqrt{3})$ m **(E)** 8 m

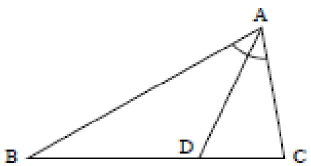
8) In eine Tabelle mit 2 Zeilen und 1007 Spalten schreiben wir in die erste Zeile alle Zahlen von 1 bis 1007 in aufsteigender Reihenfolge, in die zweite Zeile alle Zahlen von 1008 bis 2014 ebenfalls in aufsteigender Reihenfolge. Betrachten wir nun die Tabelle als 1007 Zahlenpaare, die untereinander angeschrieben sind. Bei wie vielen Zahlenpaaren ist die Zahl aus der 2. Zeile ein Vielfaches der darüber liegenden Zahl?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

9) Alberto geht in ein Papierfachgeschäft, er möchte Hefte – alle in unterschiedlichen Farben – einkaufen. Im Geschäft gibt es 2014 Hefte in verschiedenen Farben; für jede Farbe ist die Anzahl der Hefte eine Zweierpotenz, von Farbe zu Farbe unterschiedlich. Wie viele Hefte kann Alberto höchstens kaufen?
(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

10) Die Seiten eines Dreiecks messen 2 cm, 3 cm und 4 cm. Berechne die Fläche des Inkreises.
(A) $\frac{5}{12}$ cm² **(B)** $\frac{5\pi}{36}$ cm² **(C)** $\frac{5\pi}{12}$ cm² **(D)** $\frac{2\pi}{3}$ cm² **(E)** π cm²

11) Sei *k* eine festgelegte ganze positive Zahl. Für wie viele Paare (x, y) aus reellen Zahlen größer gleich 0 gilt die Gleichung $x^{2k} + y^{2k} = (xy)^k$?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** unendlich viele **(E)** hängt von *k* ab.

12) Gegeben sei das Dreieck *ABC*. Die Winkelhalbierende im Eckpunkt *A* schneidet die Seite *BC* im Punkt *D*. Wenn *CD* + *CA* = 12 m und *CD* = 1/3 *BC*, wie viel misst der Umfang des Dreiecks?



(A) weniger als 32 m **(B)** 32 m **(C)** 36 m
(D) mehr als 36 m **(E)** kann mit den gegebenen Daten nicht bestimmt werden

13) Sei *n* eine natürliche Zahl mit 6 positiven ganzzahligen Teilern. Wie viele positive ganzzahlige Teiler hat dann n^2? N.B. zu den Teilern einer Zahl gehören auch die 1 und die Zahl selbst.
(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 36 **(E)** die Antwort hängt von *n* ab.

14) Der Grad des Polynoms *p(x)* ist größer oder gleich 2 und alle Koeffizienten sind ganze Zahlen. Welche der folgenden Zahlen ist sicher ein Teiler von *p(169) – p(1)*?
(A) 25 **(B)** 32 **(C)** 36 **(D)** 49 **(E)** 56

15) Seien *a, b, c, d, e, f* positive ganze Zahlen. Maximal wie viele Zahlenpaare *(x, y),* mit *x* und *y* zwischen 0 und 1, erfüllen das folgende Gleichungs-system?

$$\begin{cases} ax^2 + bxy = c \\ dx^2 + exy = f \end{cases}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** unendlich viele **(E)** keine der vorhergehenden

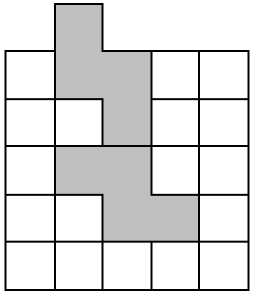
16) Betrachten wir die Zahl $N = 2000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1999 \cdot 2000$. Bezeichnen wir mit *X* die Anzahl der Nullen, mit denen *N* endet, wenn *N* im 10er-System angeschrieben ist, und mit *Y* die Anzahl der Nullen, mit denen *N* endet, wenn *N* im 5er-System angeschrieben ist. Dann ist *X* – *Y* gleich:
(A) -2 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 2013 **(E)** 2014

17) Wie ordnet man die drei Zahlen 3^{33}, 4^{30}, 5^{25} in aufsteigender Größe an ?
(A) $3^{33} < 4^{30} < 5^{25}$ **(B)** $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$ **(C)** $4^{30} < 3^{33} < 5^{25}$
(D) $4^{30} < 5^{25} < 3^{33}$ **(E)** $5^{25} < 4^{30} < 3^{33}$

18) Im Hafen sind 5 Kisten mit je 72 Bananen angekommen, eine davon enthält eine bestimmte Anzahl von radioaktiven Bananen. Man weiß: wählt man zufällig zwei der fünf Kisten und daraus zufällig je eine Banane, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine der beiden Bananen radioaktiv ist, gleich 5 %. Wie viele radioaktive Bananen sind vorhanden?
(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** keine der vorhergehenden

19) Seien *p(x)* und *q(x)* zwei Trinome. Unter Trinomen versteht man die Summe dreier Monome, die verschieden von Null und unterschiedlichen Grades sind, z. B. $-x^5 + 3x^2 + 2x$ ist ein Trinom. Wir bilden nun das Produkt $p(x) \cdot q(x)$: aus wie vielen Monomen verschieden von Null setzt sich dieses Produkt *mindestens* zusammen?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

20) Wir möchten ein Raster aus 5x5 Quadraten mit z-förmigen Fliesen auslegen (siehe Abbildung). Die Fliesen können gedreht oder gespiegelt werden, sie dürfen sich überlappen und eventuell den Rand des Rasters überschreiten. Wichtig dabei ist lediglich, dass jedes Stück einer Fliese im Inneren des Rasters genau 1, 2, 3 oder 4 Quadrate ausfüllt. Wie viele Fliesen braucht es mindestens?



(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10