PROGETTTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede – Gara Biennio

22 novembre 2011

1) Die Arbeit besteht aus 20 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben A, B, C, D, E gekennzeichnet.
2) Nur eine dieser Antworten ist richtig, die anderen vier sind falsch. Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.
3) Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. DIE BENUTZUNG EINES TASCHENRECHNERS IST NICHT GESTATTET!
*4) Für die gesamte Arbeit stehen dir **120 Minuten** zur Verfügung.*
Gute Arbeit und viel Vergnügen!

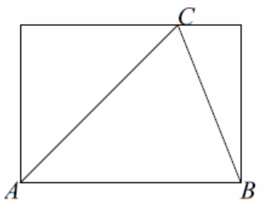
Vorname:_________________Nachname:_______________________ Klasse:_______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Wie viele 6-stellige Zahlen können aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, gebildet werden, so dass die Zahlen durch 1, 2, 3, 4, 5 , 6 teilbar sind?
(A) keine, **(B)** 1, **(C)** 18, **(D)** 120, **(E)** 360.

2) Großhund von Rottweiler, ein bekannter Devisenhändler, hat heute 2 Dukaten gegen 3 Taler und 2 Taler gegen 1 Dukaten und 3 Kronen umgetauscht. Wie viele Kronen ist ein Dukaten wert?
(A) 6, **(B)** 9, **(C)** 10, **(D)** 12, **(E)** dies kann nicht ermittelt werden.

3) Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck. Wir konstruieren ein Rechteck, bei dem eine Seite genau mit AB übereinstimmt. Der Punkt C ist auf der Rechteckseite, die AB gegenüberliegt. Wir wiederholen die Konstruktion, wobei wir von der Seite BC bzw. der Seite CA ausgehen und erhalten so drei Rechtecke. Diese drei Rechtecke haben sicher:



(A) gleichen Umfang, **(B)** gleiche Fläche, **(C)** gleiche Summe der Längen der Diagonalen , **(D)** gleiches Verhältnis zwischen großer und kleiner Seite, **(E)** keine der vorhergehenden Aussagen ist sicher wahr.

4) Der kleine Hansgauss liest in seinem Lateinbuch „XV = 15"; er fragt sich: „Wie viele verschiedene geordnete Paare (X,V) aus ganzen Zahlen (eventuell auch negativen) haben als Produkt 15?" (z. B. (2,-1) und (-1,2) sind zwei verschiedene geordnete Paare aus ganzen Zahlen). Welche Antwort ist korrekt?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 6, **(E)** 8.

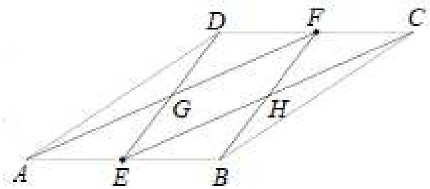
5) In jede Ecke einer Pyramide mit quadratischer Basis ist eine der Zahlen 1, 2 oder 3 geschrieben, so dass auf jeder Seitenfläche (Basis eingeschlossen) die Summe ihrer „Eckzahlen" jeweils durch 3 teilbar ist. Wie groß ist die Summe aller „Eckzahlen", wenn wir wissen, dass nicht nur 3er als Zahlen vorkommen?
(A) 6, **(B)** 8, **(C)** 9, **(D)** 12, **(E)** 14.

6) Bei einem Parallelogramm mit der Fläche 1 m² ist bei zwei benachbarten Seiten eine Länge doppelt so groß wie die andere. Außerdem misst ein Innenwinkel 60 °. Wie lang ist die kleinere Diagonale?
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2} m$, **(B)** $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3} m$, **(C)** $1\, m$, **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3} m$, **(E)** $\sqrt[4]{3}\, m$.

7) Bei dem Galadinner, das jedes Jahr während der Mathematik-Olympiade in Cesenatico stattfindet, gibt es verschiedene Vor- und Hauptspeisen. Im letzten Jahr gab es 60 Möglichkeiten zur Zusammenstellung eines Menüs (also einer Vor- und einer Hauptspeise). Heuer werden einige Vorspeisen mehr angeboten, so dass 68 verschiedene Menüs möglich sind. Wie viele Vorspeisen müssen im vorigen Jahr mindestens angeboten worden sein? [Bei einem Menü kann jede Vorspeise mit jeder Hauptspeise kombiniert werden.]
(A) 4, **(B)** 8, **(C)** 10, **(D)** 12, **(E)** 15.

8) Philipp schreibt Zahlen in sein Heft. Er beginnt mit der 2. Dann berechnet er neue Zahlen, indem er die nachfolgenden Operationen in der angegebenen Reihenfolge durchführt: Er nimmt die zuletzt geschriebene Zahl, dividiert sie durch 2, addiert 2, multipliziert mit 2 und subtrahiert 2. Das Ergebnis notiert er in seinem Heft. Wie viele Zahlen wird er geschrieben haben, nachdem er die erste vierstellige Zahl notiert hat?
(A) 1000, **(B)** 998, **(C)** 500, **(D)** 10, **(E)** keine der vorangegangen Antworten.

9) Im Parallelogramm ABCD steht die Strecke BD senkrecht zu AB und E bzw. F sind die Mittelpunkte von AB bzw. CD (siehe Abbildung) . Bestimme die Fläche des Vierecks GEHF, wenn AB = 5 cm und BD = 2 cm.

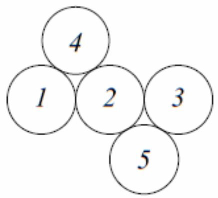


(A) $\frac{15}{8} cm^2$, **(B)** $2\, cm^2$,
(C) $\frac{9}{4} cm^2$, **(D)** $\frac{5}{2} cm^2$, **(E)** $3\, cm^2$.

10) Eine Zahl wird Palindrom genannt, wenn die Abfolge ihrer Ziffern unverändert bleibt, egal ob von links nach rechts oder von rechts nach links gelesen wird; z. B. ist 36563 ein Palindrom. Wie viele fünfstellige Palindrome gibt es, deren Summe ihrer Ziffern gerade ist?
(A) 450, **(B)** 550, **(C)** 700, **(D)** 900, **(E)** 1000.

11) Gabi schreibt eine Folge von 10 Zahlen auf (eventuell auch negative Zahlen), so dass jede Zahl der Folge ab dem dritten Folgenglied die Summe aus den zwei Vorgängern ist. Die erste Zahl der Folge ist 34, die letzte Zahl ist 0. Wie groß ist die Summe aller Folgenglieder?
(A) – 34, **(B)** 0, **(C)** 22, **(D)** 68, **(E)** 88.

12) Fünf Münzen (von 1 bis 5 durchnummeriert) mit Radius 1 cm werden gemäß Abbildung angeordnet; die Mittelpunkte der Münzen 1, 2 und 3 liegen auf einer Geraden. Konstruiere ein Viereck, das alle Münzen enthält: eine Seite berührt die Münzen 1 und 5, eine die Münzen 5 und 3, eine die Münzen 3 und 4 und eine die Münzen 4 und 1. Wie groß ist die Fläche des Vierecks?



(A) $(2\sqrt{3}+2)\ cm^2$, **(B)** $(4\sqrt{3}+4)\ cm^2$,
(C) $8\sqrt{3}\ cm^2$, **(D)** $(8\sqrt{3}+8)\ cm^2$, **(E)** $20\ cm^2$.

13) Nach Handgreiflichkeiten im Spielfeld will der Schiedsrichter den Mannschaftskapitän des Feldes verweisen. Der Kapitän ist Paolo, Andrea oder Gabriele, aber nachdem niemand die Armschleife trägt, weiß der Schiedsrichter nicht, wer es ist. Paolo sagt, er sei nicht der Kapitän; Andrea sagt, der Kapitän sei Gabriele; Gabriele sagt, einer der anderen beiden sei der Kapitän. Nur einer der drei Spieler sagt die Wahrheit. Welche der folgenden Aussagen ist dann sicher wahr?
(A) Gabriele ist nicht der Kapitän, **(B)** Andrea sagt die Wahrheit, **(C)** Paolo sagt die Wahrheit, **(D)** Andrea ist der Kapitän, **(E)** Gabriele lügt.

14) Seien *a* und *b* zwei positive reelle Zahlen, so dass Folgendes gilt $a^2(a-3b)=b^2(b-3a)$. Wie viele verschiedene Werte kann das Verhältnis $\frac{a}{b}$ annehmen?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 3, **(D)** 5, **(E)** unendlich viele.

15) Marta hat eine gerade Zahl an die Tafel geschrieben. Zwölf Mal tauscht Marta die angeschriebene Zahl mit dem um 5 erhöhten Quadrat der Zahl aus. Mit welcher Ziffer kann die Zahl enden, die am Schluss von Martas Berechnungen an der Tafel steht?
(A) 0 oder 4, **(B)** 0, 4 oder 6, **(C)** 0 oder 6, **(D)** 4 oder 6, **(E)** die Zahl kann mit jeder geraden Ziffer enden.

16) In jedem Feld eines Schachbretts mit 8 Zeilen und 8 Spalten ist eine ganze Zahl eingetragen. Die Zeilen und Spalten des Schachbretts sind von 1 bis 8 nummeriert, das Feld in Zeile 1 und Spalte 1 ist schwarz. Die Summe der Zahlen in den weißen Feldern ergibt 28, die Summe der Zahlen in den ungeraden Spalten ergibt 47. Wenn alle Vorzeichen der Zahlen in den weißen Feldern vertauscht werden, dann beträgt die Summe der Zahlen in den ungeraden Zeilen
(A) -14, **(B)** 19, **(C)** 33, **(D)** 75, **(E)** die Daten reichen nicht aus um dies zu bestimmen.

17) Markus will mit genau drei Farben die Ecken eines quadratischen Gitters (= Schnittpunkte der Gitterlinien) anmalen, das aus 100 Quadraten der Seitenlänge 1 besteht. Dabei wendet er bestimmte Kriterien an, die sein Freund Daniel nicht kennt. Bevor er beginnt, möchte Daniel einen Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt im zentralen Eckpunkt des Gitters liegt und dessen Radius so klein wie möglich ist, aber dennoch garantiert, dass der so entstandene Kreis mindestens drei Ecken der selben Farbe enthält. Wie groß ist der Radius des Kreises, den Daniel zeichnen muss? [Die Ecken können auf dem Umfang oder im Inneren des Kreises liegen.]
(A) 1 cm, **(B)** 2 cm, **(C)** $\sqrt{2}$ cm, **(D)** $\frac{3}{2}$ cm, **(E)** $2\sqrt{2}$ cm.

18) Ein rechtwinkeliges Dreieck hat eine Kathete der Länge 40 cm, der Radius des eingeschriebenen Kreises beträgt 10 cm. Wie lange ist die Hypotenuse?
(A) $10\sqrt{3}\ cm$, **(B)** $40\ cm$, **(C)** $20\sqrt{5}\ cm$, **(D)** $50\ cm$, **(E)** $60\ cm$.

19) In einer Folge aus 2011 Zahlen, ist die erste Zahl 1, die zweite Zahl 0; jede weitere Zahl ergibt sich aus der Differenz der beiden Vorgänger: die dritte Zahl ist die zweite weniger die erste, die vierte Zahl ist die dritte Zahl weniger die zweite, usw. Wie lautet die letzte Zahl der Folge?
(A) - 2010, **(B)** - 1, **(C)** 0, **(D)** 1, **(E)** 2011.

20) Ein König steht auf einem Feld eines Schachbretts, das in alle Richtungen unendlich ausgedehnt ist. Auf wie vielen verschiedenen Feldern kann er sich nach fünf Zügen befinden, wenn man weiß, dass er kein Feld zweimal betreten hat? [Wenn er einen Zug ausführt, begibt sich der König auf eines der 8 möglichen Felder, die mindestens einen gemeinsamen Eckpunkt mit seinem Feld haben.]
(A) 40 , **(B)** 80, **(C)** 99, **(D)** 100, **(E)** 120.