Ordentlicher Termin 2018
Zweite schriftliche Prüfung

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H043 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtung: LI02 - REALGYMNASIUM

LI03 - REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und bearbeite 5 der 10 gestellten Fragen.

PROBLEMSTELLUNG 1

Sie müssen den Betriebsablauf einer Maschine programmieren, die für die industrielle Produktion von Bodenfliesen verwendet wird. Die Fliesen haben eine quadratische Form mit Seitenlänge 1 (in angemessener Maßeinheit). Die Arbeitsschritte sind folgende:

- Man wählt eine im Intervall [0,1] definierte stetige Funktion $y = f(x)$, die folgende Bedingungen erfüllt:

  a) $f(0) = 1$;

  b) $f(1) = 0$;

  c) $0 < f(x) < 1$ für $0 < x < 1$.

- Die Maschine zeichnet den Graphen Γ der Funktion $y = f(x)$ und die zur y-Achse, zur x-Achse und zum Ursprung O symmetrischen Graphen von Γ. Somit entsteht eine geschlossene Kurve Λ, die durch die Punkte (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1) verläuft, symmetrisch zu den Koordinatenachsen und zum Ursprung ist, sich innerhalb des Quadrates Q mit den Eckpunkten (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1) befindet.

- Die Maschine produziert eine Fliese, indem sie das Innere der geschlossenen Kurve Λ grau einfärbt und die restliche Fläche des Quadrates Q weiß lässt. Auf dem Display erscheinen mehrere Fliesen nebeneinander, sodass man eine Vorstellung bekommt, wie der Boden aussehen könnte.

Im Handbuch findet man ein Beispiel für die Produktion einer einfachen Fliese:

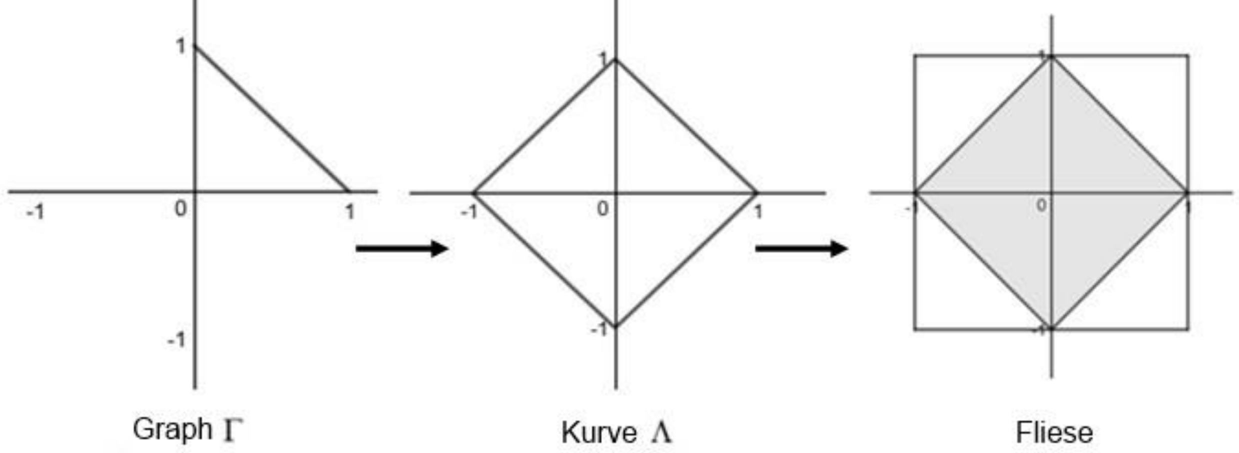


Abbildung 1

Die entsprechende Verlegung der Fliesen sieht man im folgenden Bild:

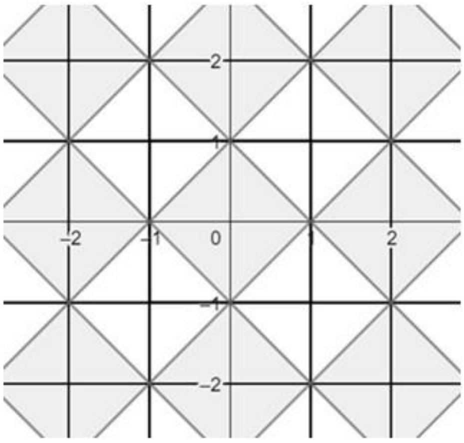


Abbildung 2

1. Bestimmen Sie den Ausdruck der Funktion $y = f(x)$ und die Gleichung der Kurve Λ, sodass Sie eine Probe machen und den Betriebsablauf der Maschine überprüfen können.

Sie werden gebeten, eine Fliese mit einem anspruchsvolleren Muster zu produzieren, die neben den zuvor beschriebenen Bedingungen a), b) und c), zusätzlich die Bedingung $f'(0) = 0$ erfüllt und bei der die eingefärbte Fläche 55% ihrer Gesamtfläche ausmacht. Verwenden Sie zu diesem Zweck Polynomfunktionen zweiten Grades und dritten Grades.

2. Nachdem Sie gezeigt haben, dass Polynomfunktionen zweiten Grades die geforderten Bedingungen nicht erfüllen können, bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ der Polynomfunktion dritten Grades $f(x)$, die die geforderten Bedingungen erfüllt. Zeichnen Sie anschließend in einem kartesischen Koordinatensystem die so entstandene Fliese.

Einem Kunden werden zwei unterschiedliche Muster angeboten, die mit Hilfe der Funktionen $a_n(x) = 1 - x^n$ und $b_n(x) = (1-x)^n$, wobei $x \in [0, 1]$ und n eine positive ganze Zahl ist, entstanden sind.

3. Zeigen Sie, dass beim Variieren von n all diese Funktionen die Bedingungen a), b) und c) erfüllen.

   $A(n)$ und $B(n)$ seien die eingefärbten Flächen der durch die Funktionen a_n und b_n entstandenen Fliesen. Berechnen Sie $\lim_{n \to +\infty} A(n)$ und $\lim_{n \to +\infty} B(n)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch.

Der Kunde entscheidet sich, 5.000 Fliesen mit dem aus $a_2(x)$ hervorgegangenen Muster und 5.000 Fliesen mit dem aus $b_2(x)$ hervorgegangenen Muster zu bestellen. Die Lackierung wird von einem mechanischen Arm vollzogen, der, nachdem die Farbe aufgebracht worden ist, über die Diagonale der Fliese wieder zum Startpunkt zurückkehrt. Aufgrund einer Fehlfunktion lässt der mechanische Arm während der Produktion der 10.000 Fliesen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% einen Tropfen auf einen zufälligen Punkt der Diagonalen der Fliese fallen und bekleckst somit die gerade eben produzierte Fliese.

4. Geben Sie einen begründeten Schätzwert für die Anzahl der Fliesen an, die, aufgrund eines Flecks im nicht eingefärbten Bereich der Fliese, am Ende des Produktionsprozesses beschädigt sein werden.

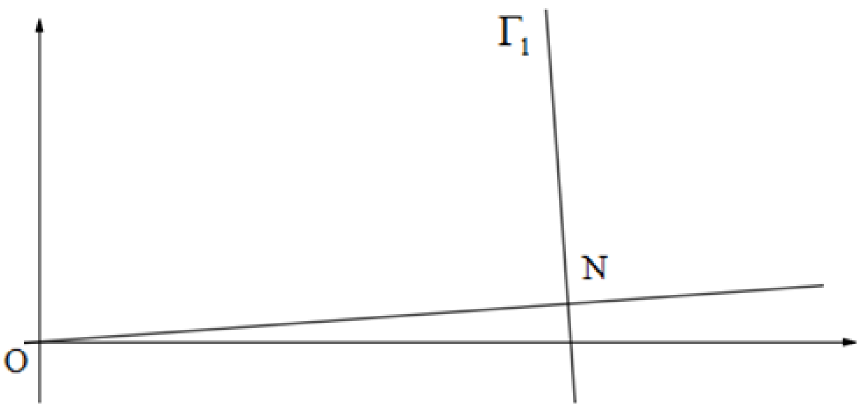
PROBLEMSTELLUNG 2

Gegeben sei die Funktion f_k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die folgendermaßen definiert ist:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

1. Sei Γ_k der Graph der Funktion. Zeigen Sie, dass für jeden beliebigen Wert des Parameters k die Gerade r_k, Tangente an Γ_k im Punkt mit Abszisse 0 und die Gerade s_k, Tangente an Γ_k im Punkt mit Abszisse 1, sich in einem Punkt M mit Abszisse $\frac{2}{3}$ schneiden.
2. Nachdem Sie gezeigt haben, dass $k = 1$ die größte positive ganze Zahl ist, für die die Ordinate des Punktes M kleiner als 10 ist, untersuchen Sie den Verlauf der Funktion $f_1(x)$, indem Sie die Extrem- und Wendepunkte berechnen und den Graphen zeichnen.
3. Sei T das Dreieck, das durch die Geraden r_1, s_1 und von der Abszissenachse begrenzt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein innerhalb von T zufällig ausgewählter Punkt $P(x_p, y_p)$ sich oberhalb von Γ_1 befindet (d.h. $y_p > f_1(x)$ für diesen Punkt P).
4. In der Abbildung sieht man einen Punkt $N \in \Gamma_1$ und einen Teil des Graphen Γ_1. Die normale Gerade zu Γ_1 im Punkt N (d.h. senkrecht zur Tangente an Γ_1 in diesem Punkt) geht durch den Ursprung O. Der Graph Γ_1 besitzt drei Punkte mit dieser Eigenschaft. Beweisen Sie, dass der Graph eines beliebigen Polynoms mit Grad $n > 0$ nicht mehr als $2n - 1$ Punkte besitzen kann, bei denen die zum Graphen normale Gerade durch den Ursprung geht.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

FRAGENKATALOG

1. Man beweise, dass das Volumen eines in einem Kegel eingeschriebenen Zylinders kleiner als die Hälfte des Kegelvolumens ist.

2. Man verfügt über zwei gleiche gezinkte Würfel in Form eines regelmäßigen Tetraeders. Die Seiten sind von 1 bis 4 durchnummeriert. Wirft man jeweils einen Würfel, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass man 1 würfelt, doppelt so groß wie jene, dass man 2 würfelt; diese ihrerseits ist wiederum doppelt so groß, wie die Wahrscheinlichkeit, dass man 3 würfelt, die ihrerseits wiederum doppelt so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, dass man 4 würfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei gleiche Zahlen würfelt, wenn man die beiden Würfel gleichzeitigt wirft?

3. Man bestimme die Werte für k, für die die Gerade mit Gleichung $y=-4x+k$ Tangente an den Graphen der Gleichung $y=x^3-4x^2+5$ ist.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x)=\dfrac{3x-e^{sen\,x}}{5+e^{-x}-\cos x}$. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, falls sie existieren, und begründen Sie Ihre Antworten angemessen.

5. Mit einem 2 Meter langen Zaun möchte man eine Fläche, deren Form aus einem Rechteck und einem anliegenden Halbkreis zusammengesetzt ist, einzäunen (siehe Abbildung).

   Man bestimme die Seitenlängen des Rechtecks, wenn man die maximale Fläche einzäunen will.

6. Man bestimme die Gleichung der Kugeloberfläche S, mit Mittelpunkt auf der Geraden

   r: $\begin{cases} x=t \\ y=t \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$,

   die die Ebene $\pi: 3x-y-2z+14=0$ im Punkt $T(-4,0,1)$ berührt.

7. Man bestimme a, sodass

$$\int_a^{a+1} (3x^2+3)\,dx$$

   gleich 10 ist.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

8. In einem Spiel mit zwei Spielern bekommt man für jede gewonnene Runde einen Punkt und es siegt jener Spieler, der zuerst 10 Punkte erreicht. Zwei Spieler, die die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, eine Runde zu gewinnen, spielen gegeneinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der beiden Spieler 12 oder weniger Runden benötigt, um das Spiel zu gewinnen?

9. Im dreidimensionalen Raum sind folgende Punkte gegeben: $A(3,1,0), B(3,-1,2), C(1,1,2)$. Man zeige, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist und auf der Ebene α mit Gleichung $x + y + z - 4 = 0$ liegt. Wo befinden sich die Punkte P für die $ABCP$ ein regelmäßiges Tetraeder ist?

10. Man bestimme die Werte für den Parameter $k \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $y(x) = 2e^{kx+2}$ Lösung der Differentialgleichung $y'' - 2y' - 3y = 0$ ist.

Dauer der Arbeit: 6 Stunden.
Es ist die Benutzung von wissenschaftlichen oder graphischen Taschenrechnern erlaubt, falls sie nicht ein CAS-System aufweisen (siehe M.V. Nr. 350, Art. 18, Abs. 8).
Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.
Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.