

Problema 1: Il porta scarpe da viaggio

Risoluzione

Punto 1

Dopo aver scelto come unità di misura (dm), dai dati si ricava che la curva deve passare per i punti $A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $B\left(1, \frac{4}{5}\right)$, $C\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

a) L'equazione $y = e^{(a \cdot x^2 + bx + c)} + (x + d)^2$ è da scartare perchè somma di una funzione esponenziale (per la quale non esiste nessun valore reale che la renda nulla), con una quantità al quadrato che è sempre non negativa, quindi $y \neq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$, di conseguenza il punto $D(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

b) L'equazione $y = \frac{\sin^2(a \cdot x + b) + \cos^2(a \cdot x + b)}{c \cdot x + d}$ è da scartare perchè dalla prima relazione fondamentale della goniometria sappiamo che il numeratore è sempre uguale a 1 e, di conseguenza, per i valori di x per cui esiste, il punto $C(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

L'unica funzione che può soddisfare le condizioni poste dal problema è rappresentata dalla cubica

$$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Punto 2

Per trovare i coefficienti a, b, c ed d consideriamo la condizione di appartenenza alla curva dei 4 punti.

$A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $B\left(1, \frac{4}{5}\right)$ punto di flesso, $C\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} = a + b + c + d \\ \frac{6}{5} = 8 \cdot a + 4 \cdot b + 2 \cdot c + d \\ 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d \end{array} \right.$$

$$\left\{ a = -\frac{4}{15}, b = \frac{4}{5}, c = -\frac{2}{15}, d = \frac{2}{5} \right\}$$

(1.1)

La curva ha equazione $y = -\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5}$

$$y = -\frac{4}{15} x^3 + \frac{4}{5} x^2 - \frac{2}{15} x + \frac{2}{5} \quad (1.2)$$

Punto 3

▼ Studio della funzione

$$y = -\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5}$$

La funzione essendo polinomiale è definita $\forall x \in \mathcal{R}$, tuttavia noi la studiamo e la rappresentiamo nell'intervallo $[0,3]$

Non calcoliamo $f(-x)$ perchè in tale insieme la funzione non ha simmetrie evidenti cioè non è né pari né dispari.

Intersezione con l'asse delle ordinate

$$x=0 \quad y = \frac{2}{5}$$

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y=0 \\ y = -\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$-\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5} = 0$$

$$-\frac{4}{15} x^3 + \frac{4}{5} x^2 - \frac{2}{15} x + \frac{2}{5} = 0 \quad (1.1.1)$$

Semplifichiamo per 2 e facciamo il m.c.m.

$$-2 x^3 + 6 x^2 - x + 3 = 0$$

$$-2 x^3 + 6 x^2 - x + 3 = 0 \quad (1.1.2)$$

$$-(x-3)(2x^2+1) = 0 \quad (1.1.3)$$

Soluzione $x=3$

I punti di intersezione con gli assi li conoscevamo già e sono

$$A\left(0, \frac{2}{5}\right) \text{ e } D(3, 0)$$

Segno della funzione

$$y > 0 \quad -(x-3)(2x^2+1) > 0 \quad \text{per } x < 3.$$

Quindi nell'intervallo $[0,3]$ la funzione è sempre positiva.

Nell'intervallo $[0,3]$ non vanno ricercati **A.O.** e neanche **A. Obl.** perchè è un intervallo chiuso e limitato.

Inoltre non ci sono **A.V.** perchè non ci sono punti di discontinuità.

Calcoliamo la derivata prima per studiare la monotonia della funzione ed eventuali punti di massimo o di minimo.

Calcoliamo la derivata prima

$$\frac{d}{dx} y(x) = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{2}{15} \quad (1.1.4)$$

Segno della derivata prima

$$\left\{ x \leq 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}, 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \leq x \right\} \quad (1.1.5)$$

$$y' \geq 0 \quad 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \leq x \leq 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30} \quad y \text{ cresce}$$

$$y' < 0$$

$$\text{per } 0 \leq x < 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \quad \vee \quad 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30} < x \leq 3 \quad y \text{ decresce}$$

Dall'analisi della monotonia risulta che \exists un punto di minimo relativo per $x =$

$1 - \frac{1}{6}\sqrt{30}$ e un massimo relativo nel punto

di ascissa $x = 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}$

$$\text{eval}\left(-\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5}, x = 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$$

$$-\frac{4}{15} \left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^3 + \frac{4}{5} \left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^2 + \frac{4}{15} - \frac{1}{45}\sqrt{30} \quad (1.1.6)$$

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{27} \sqrt{30} \quad (1.1.7)$$

$$\text{eval}\left(-\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5}, x=1 - \frac{1}{6} \sqrt{30}\right)$$

$$-\frac{4}{15} \left(1 - \frac{1}{6} \sqrt{30}\right)^3 + \frac{4}{5} \left(1 - \frac{1}{6} \sqrt{30}\right)^2 + \frac{4}{15} + \frac{1}{45} \sqrt{30} \quad (1.1.8)$$

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{27} \sqrt{30} \quad (1.1.9)$$

$$\text{Max}\left(1 + \frac{1}{6} \sqrt{30}, \frac{4}{5} + \frac{2}{27} \sqrt{30}\right), \text{min}\left(1 - \frac{1}{6} \sqrt{30}, \frac{4}{5} - \frac{2}{27} \sqrt{30}\right)$$

Calcoliamo la derivata seconda

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = -\frac{8}{5} x + \frac{8}{5} \quad (1.1.10)$$

$$y'' = -\frac{8}{5} x + \frac{8}{5}$$

$$y'' \geq 0$$

$$\text{solve}\left(\left\{-\frac{8}{5} x + \frac{8}{5} \geq 0\right\}, x\right)$$

$$\{x \leq 1\} \quad (1.1.11)$$

$$y'' > 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \cup$$

$$y'' < 0 \quad \text{per } 1 < x < 3 \quad \cap$$

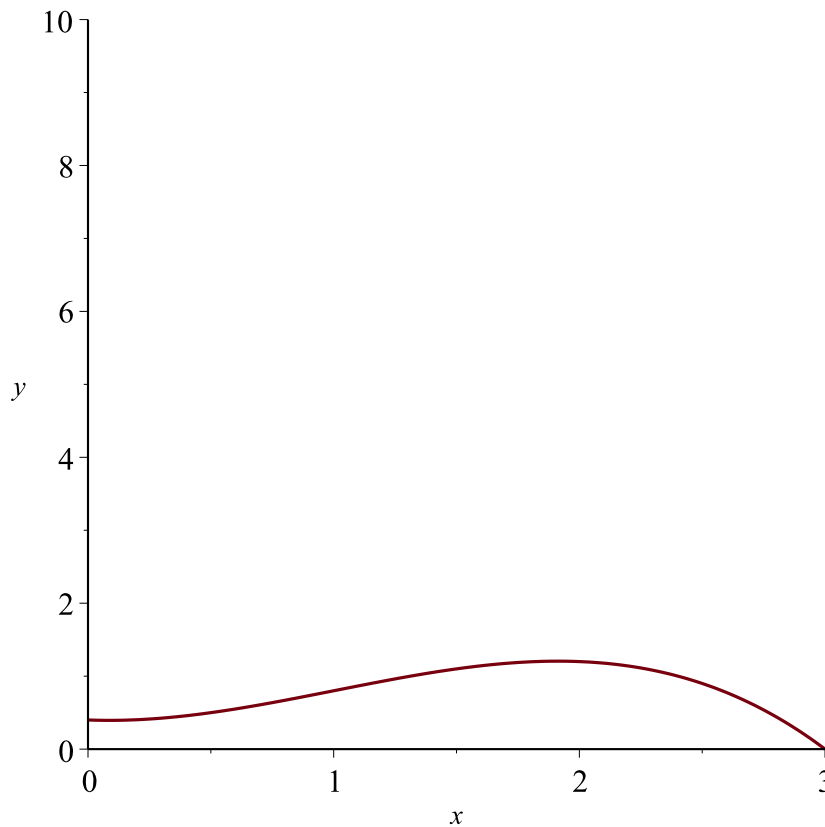
$$y'' > 0 \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1 \quad y \text{ convessa}$$

$$y'' < 0 \quad 1 < x < 3 \quad y \text{ concava} \quad \text{flesso} \left(1, \frac{4}{5}\right) \text{ come indicato}$$

nelle ipotesi

rappresentiamo la curva

$$\text{plot}\left(-\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5}, x=0 \dots 3, y=0 \dots 10\right)$$



Poichè l'ordinata del punto di massimo è approssimativamente data da

$$y_M = \text{evalf}\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{27} \sqrt{30}, 3\right)$$

$$y_M = 1.21$$

(1.1.12)

il contenitore può essere utilizzato per scarpe aventi una altezza massima di poco superiore a 12 cm e **quindi non può contenere scarpe alte 14 cm**

▼ Punto 4

Per mostrare che il rapporto ricavo costi **non cresce indefinitamente**, indichiamo con n il numero di pantofole prodotte in un mese, e definiamo tale rapporto:

$$\frac{15 \cdot n}{500 + 5 \cdot n}$$

Calcoliamo il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n}{500 + 5n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n}{500 + 5n} = 3$$

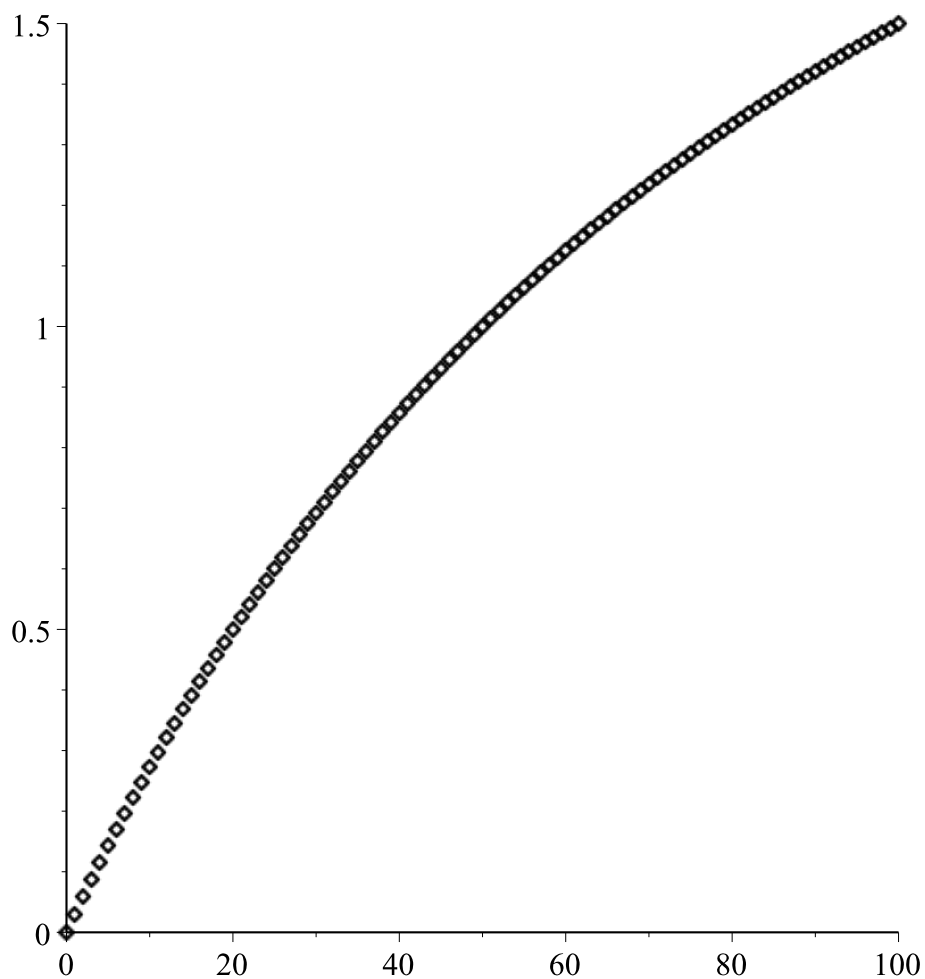
Otteniamo quindi che il ricavo, contrariamente a quanto pensava l'artigiano, al crescere di n si stabilizza e tende a diventare tre volte il costo

Vediamo come il processo si può rappresentare graficamente.

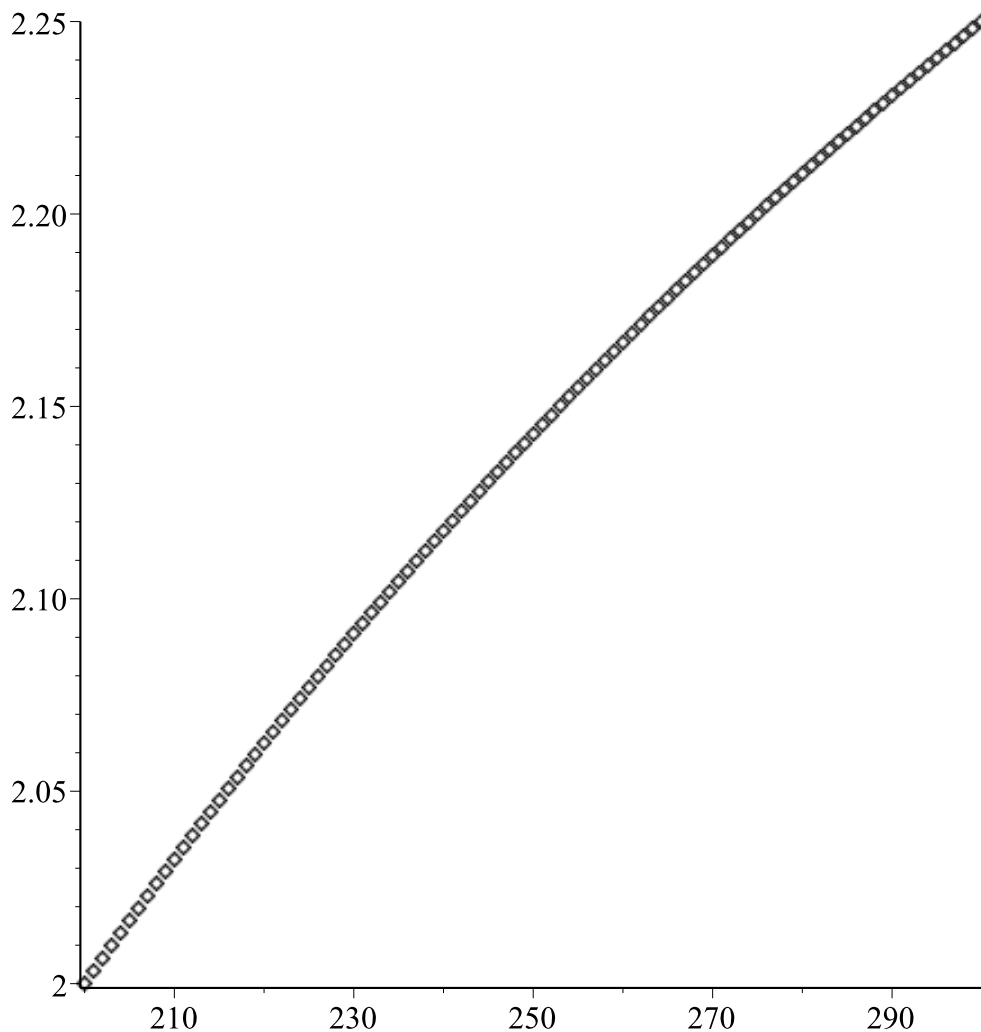
La funzione che rappresenta il rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese è **la successione**

$$a_n = \frac{15 \cdot n}{500 + 5 \cdot n}$$

Il suo grafico potrebbe essere **rappresentato per quantità discrete** $0 < n < 100$ come segue :



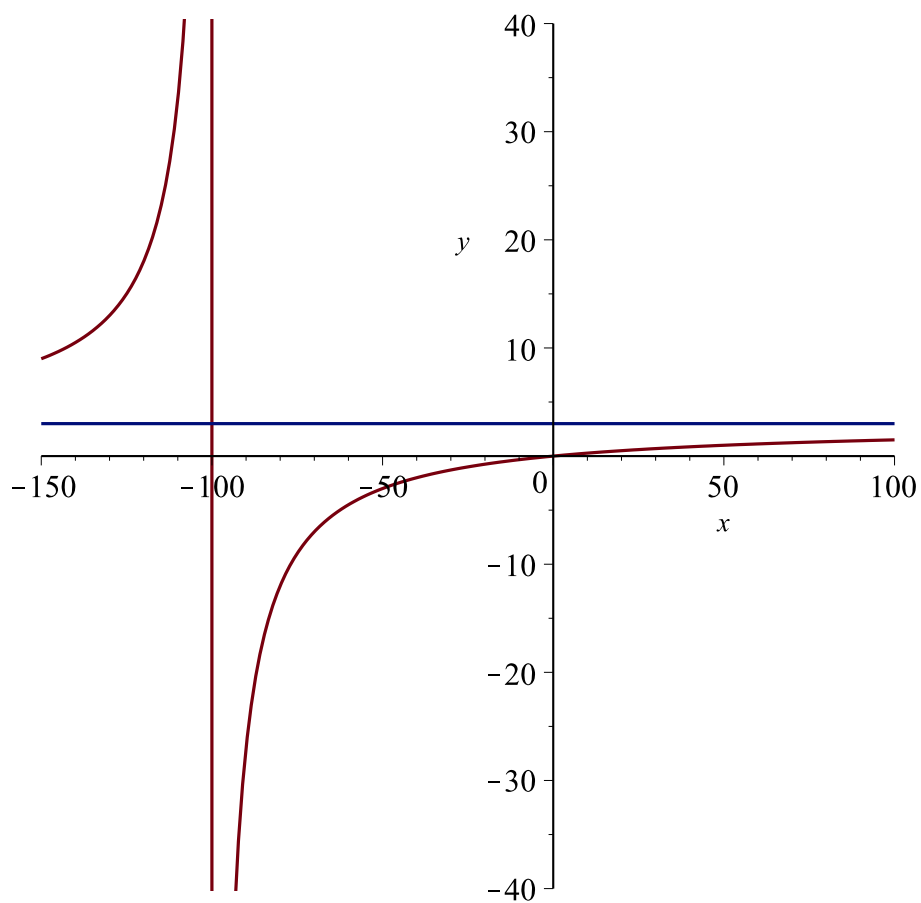
Analizzando il grafico si può dedurre che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto aumenta come pensa l'artigiano; si può mostrare all'artigiano che affinché il ricavo eguagli la spesa devono essere prodotti e **venduti almeno 50 contenitori**; solo raggiungendo i 200 contenitori (grafico per $200 < n < 300$) il ricavo è doppio della spesa, superati i 200 contenitori il ricavo cresce.



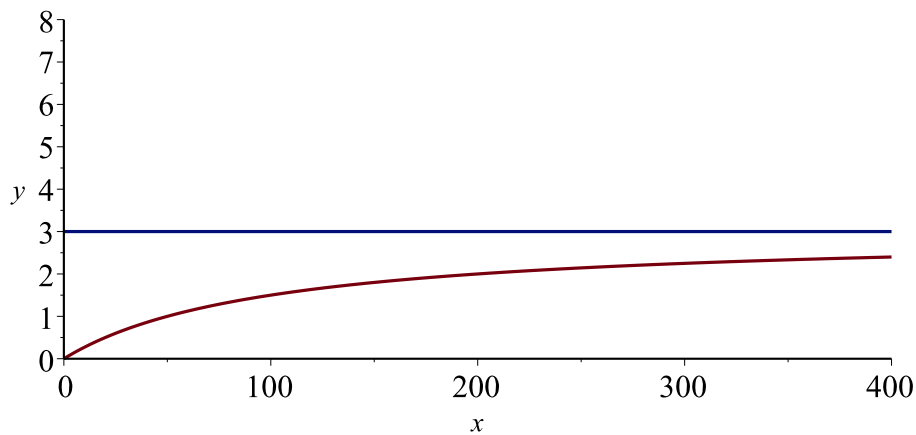
Per mostrare graficamente all'artigiano come il ricavo non cresce indefinitamente occorre mostrare nel grafico la stabilizzazione ($n \rightarrow \infty$) e quindi dobbiamo associare al rapporto ricavo/costo la **funzione continua** che si ottiene sostituendo ad n (variabile discreta) la variabile continua $x \in \mathbb{R}$ e si ha :

$$y = \frac{15 \cdot x}{500 + 5 \cdot x}$$

Essa è una funzione omografica avente come asintoti le rette $x = -100$ (*asintoto verticale*) e $y = 3$ (*asintoto orizzontale*)



Poichè però il numero di contenitori non può essere negativo, l'andamento della funzione che modella il rapporto ricavo/costo è costituito dalla parte di grafico che si ottiene per $x \geq 0$.
Tale grafico è :



Dal grafico si mostra all'artigiano che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto tende a stabilizzarsi e quindi non a crescere indefinitamente, in modo che il ricavo *tende* a diventare **il triplo della spesa**, puoi anche aggiungere all'artigiano, che sicuramente ti chiederà con quanti contenitori prodotti il ricavo è 3 volte il costo, che **il numero di contenitori che permettono il 90% del rapporto pari a 3 è 900, ma non è possibile che ottenga un ricavo pari a 3**, è molto complesso spiegare a chi non ha la competenza in matematica cos'è un asintoto orizzontale!