Matura2016

Lösen Sie eine Problemstellung und 5 der 10 folgenden Fragen!

0.1 2016 1. Session

2016 1. Session Problemstellung 1

Der Verwalter eines kleinen Kondominiums muss einen neuen Heizöltank einbauen lassen. Die im Handel erhältlichen Modelle erfüllen die Bedürfnisse des Kondominiums nicht, deshalb werden Sie beauftragt einen entsprechenden Tank zu planen.

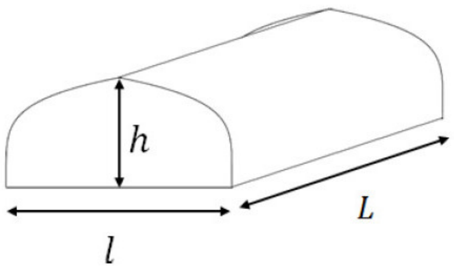


Abbildung 1

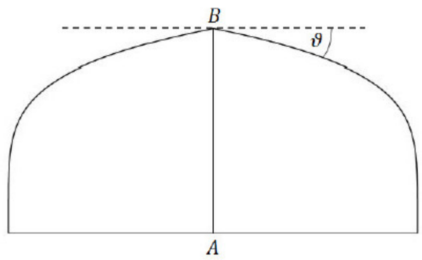


Abbildung 2

Der Verwalter gibt Ihnen hierfür die Zeichnung in Abbildung 1 und folgende zusätzliche Informationen:

- die Länge L des Tanks muss 8m betragen,
- die Breite l des Tanks muss 2m betragen,
- die Höhe h des Tanks muss 1m betragen,
- der Querschnitt (Abbildung 2) muss an der höchsten Stelle eine Spitze mit einem Winkel $\vartheta \geqq 10°$ aufweisen, um in den Wintermonaten eine Eisansammlung zu vermeiden,
- das Volumen des Tanks muss mindestens $13m^3$ betragen, damit das Kondominium den ganzen Winter über mit zwei Heizöllieferungen den Heizungsbetrieb aufrecht erhalten kann,
- in der Mitte der Seitenwand des Tanks, längs der Symmetrieachse (Strecke AB in Abbildung 2), muss eine skalierte Anzeige angebracht werden, die in Abhängigkeit von der erreichten Füllhöhe z des Heizöls den Prozentsatz der Füllung des Tankvolumens V anzeigt.

1. Wählen Sie den Punkt A in Abbildung 2 als Ursprung des Koordinatensystems. Ermitteln Sie unter den folgenden Funktionenscharen jene, die für $x \in [-1;1]$ und k eine natürliche Zahl die Profilkurve der Seitenwand am besten beschreibt. Begründen Sie Ihre Wahl angemessen.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-|x|)^{\frac{1}{k}} \\ f(x) &= -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1 \\ f(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right) \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie den Wert von k, so dass die Bedingungen für den Winkel ϑ und das Volumen des Tanks erfüllt werden.

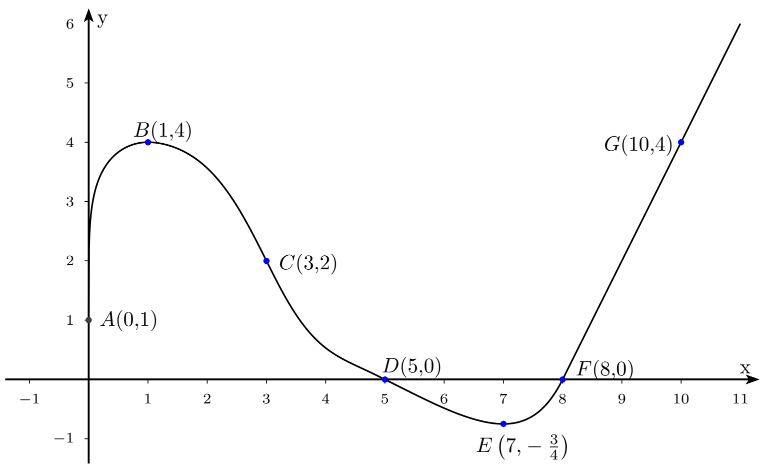
3. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion $V(z)$, die der Füllhöhe des Heizöls z (in Metern) den Prozentsatz der Füllung des Tankvolumens V zuordnet. Dieser Prozentsatz wird auf der Skala anzeigt.

Bei der Übergabe Ihres Projektes macht der Verwalter folgenden Einwand: Bei einer Tankhöhe von einem Meter muss der Wert z der Füllhöhe, gemessen in cm, dem Prozentsatz der Füllung entsprechen. Das heißt zum Beispiel: Wenn das Heizöl eine Füllhöhe von 50 cm erreicht, dann entspricht dies einer Füllung von 50% des Tanks. Bei Ihrer Anzeige scheint aber bei einer Füllhöhe von 50 cm ein Prozentsatz von 59,7% Füllung des Tanks auf.

4. Legen Sie die Argumente dar, mit denen Sie dem Verwalter erklären können, dass seine Überlegung falsch ist. Zeigen Sie auch, welchen maximalen Fehler, in absoluten Werten, man macht, wenn man, wie vom Verwalter vorgeschlagen, die Füllhöhe z als Prozentsatz der Füllung verwendet und geben Sie an, bei welchem Wert von z sich dieser maximale Fehler ergibt.

2016 1. Session Problemstellung 2

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph Γ der stetigen Funktion $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dargestellt. Die Funktion ist in $]0, +\infty[$ ableitbar und es sind die Koordinaten einiger Punkte angegeben.



Man weiß, dass die y-Achse im Punkt A Tangente an Γ ist, dass B ein Hochpunkt, E ein Tiefpunkt ist und dass C ein Wendepunkt mit der Tangente $2x + y - 8 = 0$ ist.

Im Punkt D lautet die Gleichung der Tangente $x + 2y - 5 = 0$ und für $x \geqq 8$ besteht der Graph aus einer Halbgeraden, die durch den Punkt G verläuft. Außerdem weiß man, dass die Fläche des ebenen Bereichs, der vom Bogen $ABCD$, von der x-Achse und von der y-Achse begrenzt wird, $11FE$ beträgt, während die Fläche des ebenen Bereichs, der vom Bogen DEF und von der x-Achse begrenzt wird, $1FE$ beträgt.

1. Skizzieren Sie auf der Grundlage der vorliegenden Informationen die Graphen der Funktionen

$$\begin{aligned} y &= f'(x) \\ F(x) &= \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

   Welches sind die Werte von $f'(3)$ und $f'(5)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils den Definitionsbereich an.

$$y = |f'(x)|$$
$$y = |f(x)|'$$
$$y = \frac{1}{f(x)}$$

3. Bestimmen Sie die Mittelwerte von $y = f(x)$ und $y = |f(x)|$ im Intervall $[0, 8]$, den Mittelwert von $y = f'(x)$ im Intervall $[1, 7]$ und den Mittelwert von $y = F(x)$ im Intervall $[9, 10]$.

4. Geben Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graph der Funktion $F(x)$ in den Punkten mit Abszisse 0 und 8 an. Begründen Sie Ihre Antworten.

2016 1. Session Frage 1

Es ist bekannt, dass $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Ermitteln Sie, ob die reelle Zahl u, für die $\int\limits_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1.$ gilt, positiv oder negativ ist.

Bestimmen Sie außerdem die Werte der folgenden Integrale und begründen Sie dabei jeweils Ihre Antworten:

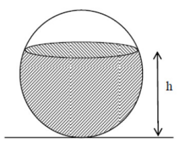
$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

2016 1. Session Frage 2

Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y = 1 - ax^2$, mit $a > 0$. In den von der Parabel und der x-Achse eingeschlossenen Bereich sollen Rechtecke eingeschrieben werden, deren eine Seite auf der x-Achse liegt. Bestimmen Sie a so, dass das Rechteck maximale Fläche und maximalen Umfang besitzt.

2016 1. Session Frage 3

Ein kugelförmiger Behälter mit Innenradius r ist bis auf eine Höhe h mit Flüssigkeit gefüllt. Verwenden Sie die Integralrechnung, um zu beweisen, dass das Volumen der Flüssigkeit durch $V = \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$ gegeben ist.



2016 1. Session Frage 4

Ein Test besteht aus 10 Fragen. Zu jeder Frage sind 4 mögliche Antworten vorgegeben, von denen jeweils nur eine einzige richtig ist. Um den Test zu bestehen, müssen mindestens 8 Fragen richtig beantwortet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test zu bestehen, wenn alle Fragen rein zufällig beantwortet werden.

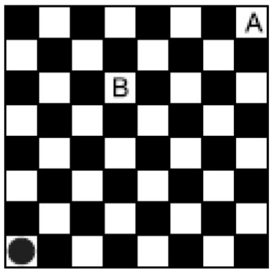
2016 1. Session Frage 5

Die Ebene E mit der Gleichung $2x - 2y + z - 9 = 0$ ist Tangentialebene zur Kugel mit Mittelpunkt $K(-2, -1, 2)$. Welches ist der Berührpunkt? Wie groß ist der Radius der Kugel?

2016 1. Session Frage 6

Geben Sie an, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Antwort.
„Es gibt ein Polynom $P(x)$ für das gilt: $|P(x) - cos(x)| \leqq 10^{-3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$“.

2016 1. Session Frage 7



Eine Spielfigur wird, wie in der Abbildung, in das äußerste Feld links unten eines Schachbrettes gesetzt. Bei jedem Zug des Spiels kann die Figur entweder in das Feld rechts oder das Feld oberhalb des Ausgangsfeldes ziehen. Es wird zufällig ein Weg, bestehend aus 14 Zügen. ausgewählt, bei dem die Figur am Ende in der entgegengesetzten Ecke A steht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Weg über das Feld B führt?

2016 1. Session Frage 8

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$. Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)$, deren Graph durch den Punkt $(1; 2e)$ verläuft.

2016 1. Session Frage 9

Gegeben sind die Geraden

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

und der Punkt $P(1, 0, -2)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die durch P verläuft und parallel zu den beiden Geraden ist.

2016 1. Session Frage 10

Gegeben ist die im Intervall $1, +\infty[$ definierte Funktion f:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln(t)} dt$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graph von f im Punkt mit Abszisse $\sqrt{e}$.