Problemstellung 2

In den Jahren 1963-1964 hat der Physiker W. Bertozzi mit seinen Mitarbeitern ein Experiment am MIT in Boston durchgeführt, bei dem die Existenz einer maximalen Geschwindigkeit nachgewiesen wurde. Der Betrag dieser Geschwindigkeit war gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Nach den Gesetzen der klassischen Physik ist es möglich, einen Körper aus der Ruhe heraus auf eine beliebige Geschwindigkeit zu beschleunigen, während dies nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie nicht möglich ist.

In diesem Experiment wurden Elektronen einerseits durch geeignete elektrische Felder, die von einem van de Graaff Beschleuniger erzeugt wurden, sowie weiters durch einen Linearbeschleuniger (LINAC) beschleunigt. Die Elektronen werden von einer Heizkathode in Form von Pulsen der Länge 3 ns (3×10^{-9}s) erzeugt und dann durch die Potentialdifferenzen des van de Graaff Generators beschleunigt, die maximal 1,5 Millionen Volt betragen.

Die von der ersten Beschleunigungsstufe heraustretenden Elektronen durchlaufen ein kleines metallisches Röhrchen in A, in dem sie einen Stromimpuls auslösen, der an ein Oszilloskop geschickt wird (siehe Abb. 1 und 2). Die Strecke zwischen A und B beträgt 8,40 m und ist frei von Luft und anderen störenden elektrischen Feldern (der Linearbeschleuniger LINAC ist in der ersten Phase des Experiments - und insbesondere auch während der unten wiedergegebenen Messungen, siehe Tabelle 1 - nicht in Betrieb). In B angekommen stoßen die Elektronen auf eine Aluminiumscheibe, wo sie erneut einen Stromimpuls auslösen, welcher ebenfalls an das Oszilloskop übertragen wird. Die Distanz zwischen den beiden Impulsen auf dem Oszilloskop erlaubt die Messung der Zeit, welche von den Elektronen benötigt wurde, um die Strecke AB zurückzulegen, und damit auch ihre Geschwindigkeit.

Jede Unterteilung (div) des Gitters des Oszilloskops entspricht hierbei einer Zeit von ca. $0,98 \times 10^{-8}$s.

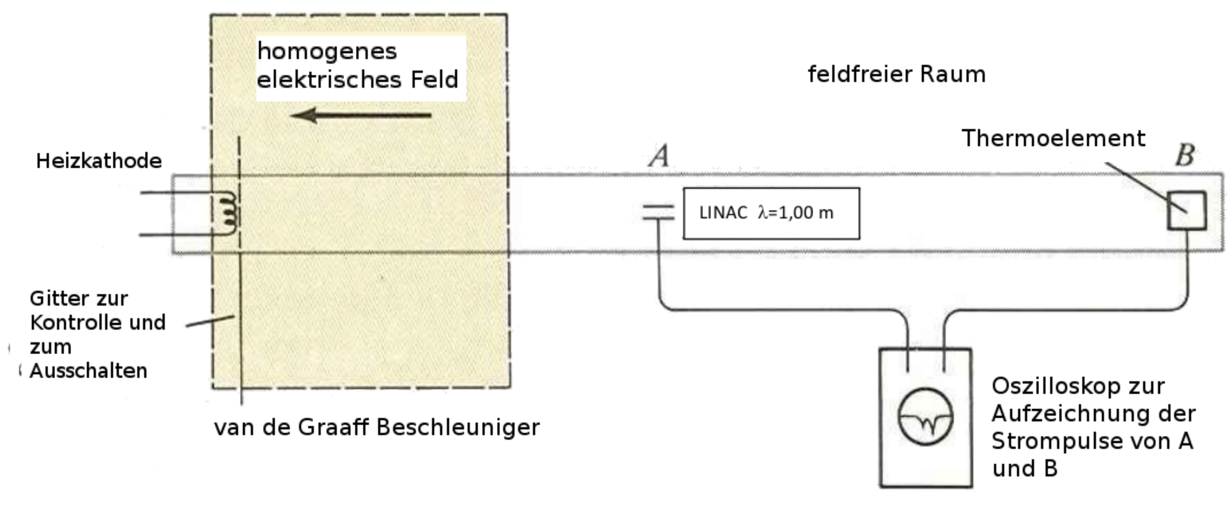


Abbildung 1: Aufbau des Experiments

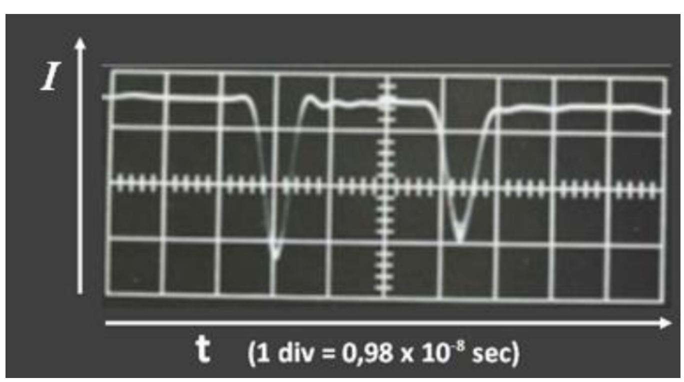


Abbildung 2: Messwerte auf dem Oszilloskop

Indem man auf vom Oszilloskop die Distanz zwischen den beiden Pulsen abliest, erhält man bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen folgende Werte (Tabelle 1)

Potentialdifferenz (in 10^6V)	0,5	1	1,5
Anzahl der Unterteilungen (div) zwischen den Impulsen	3,30	3,10	2,95

Tabelle 1: Ergebnisse erste Phase

In einer zweiten Phase des Experiments wird - um die Energie der Elektronen noch weiter zu steigern - auch der Linearbeschleuniger LINAC verwendet; er beschleunigt auf einer Strecke von einem Meter die Elektronen durch eine zusätzliche Potentialdifferenz von 3,0 Millionen Volt.

In dieser zweiten Phase des Experiments wird mit einem Thermoelement auch die Wärme gemessen, die die Elektronen an die Scheibe B abgeben, sowie durch ein Ladungsmessgerät die auf B auftreffende Ladungsmenge. Die Ergebnisse für zwei verschiedene Gesamtpotentialdifferenzen sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

Potentialdifferenz (in 10^6V)	1,5	4,5
Energie des Elektronenbündels (J)	10,0	29,2
Ladung des Elektronenbündels (µC)	6,1	6,1

Tabelle 2: Ergebnisse zweite Phase

Aufträge:

1. Analysiere das beschriebene Experiment und stelle in einem kartesischen Koordinatensystem den Verlauf von $\frac{v^2}{c^2}$ als Funktion von W dar, sowohl für klassisch erwartete Ergebnisse, als auch für die effektiv gemessenen. Hierbei ist v die Geschwindigkeit der Elektronen im Punkt B, c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und W ist die Arbeit, die vom elektrischen Feld zur Beschleunigung der Elektronen aufgebracht wird.

2. Ermittle das geeigneteste physikalische Modell, um die beobachtete Situation zu beschreiben, also den Verlauf von $\frac{v^2}{c^2}$ als Funktion von W.

3. Berechne die aufgrund des gewählten Modells erwarteten Werte von $\frac{v^2}{c^2}$ und vergleiche diese mit den gemessenen.

4. Weise anhand der Daten aus Tabelle 2 nach, dass die kinetische Energie der Elektronen im Punkt B ungefähr der vom Beschleuniger gelieferten Energie entspricht und rechtfertige hiermit folgende Aussage: "Der Fakt, dass die gemessene Geschwindigkeit der Elektronen kleiner ist als klassisch erwartet, liegt nicht an Energieverlusten in der Apparatur".

Lösung Problemstellung 2

1. Die Analyse fällt kurz aus: Durch die elektrischen Felder werden die Elektronen beschleunigt, die Zunahme der kinetischen Energie kann direkt von den Potentialdifferenzen abgelesen werden, wenn man Energien in eV angibt.
   Klassisch betrachtet ist die kinetische Energie der Elektronen gegeben durch $E_{kin} = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0c^2\left(\frac{v}{c}\right)^2$. Hiermit erhält man den Ausdruck

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2 \cdot W}{m_0c^2},$$

   wobei $m_0c^2 = 0,511 \times 10^6 eV$.
   Für die gemessenen Werte berechnet man jeweils:

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} = \frac{8,40m}{x \cdot t_{div}} \\ \left(\frac{v}{c}\right)^2 &= \left(\frac{8,40m}{x \cdot t_{div} \cdot c}\right)^2, \end{aligned}$$

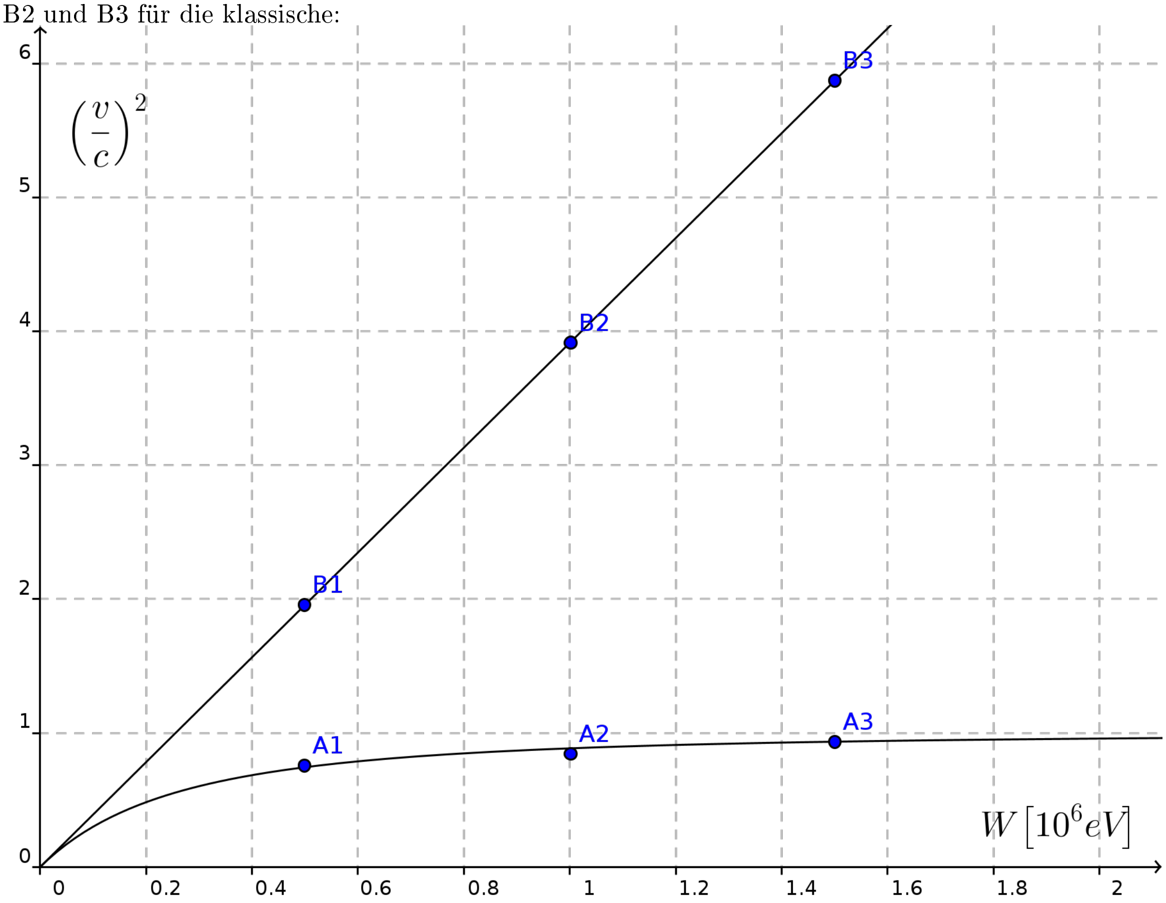
   wobei x die Anzahl der Unterteilungen angibt.
   Somit erhält man folgende Tabellen:

E_{kin} bzw. W (in 10^6V)	0,5	1	1,5
$\left(\frac{v}{c}\right)^2_{Klassisch}$	$1,957$	$3,914$	$5,871$

E_{kin} bzw. W (in 10^6V)	0,5	1	1,5
$\left(\frac{v}{c}\right)^2_{Experimentell}$	$0,751$	$0,851$	$0,939$

Tabelle 3: Auswertung

   Für die Darstellung erhält man somit die Punkte A1, A2 und A3 für die experimentelle Situation und die B1, B2 und B3 für die klassische:



2. Die korrekte, mit dem Experiment im Einklang stehende, Berechnung muss natürlich relativistisch durchgeführt werden. Hierfür benutzt man den Ausdruck für die relativistische Gesamtenergie eines Körpers der Geschwindigkeit v: $E = m(v)\,c^2 = E_{kin} + E_{Ruhe}$, wobei $m(v) = m_0\gamma = m_0\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ die relativistische Masse bezeichnet. Damit erhält man für die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= m_0c^2(\gamma - 1) \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right). \end{aligned}$$

Eine Umformung ergibt

$$\gamma = \frac{E_{kin} + m_0c^2}{m_0c^2}$$

bzw.

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_0c^2}{W + m_0c^2}\right)^2. \qquad (1)$$

Diese Funktion (sowie der klassische, lineare Zusammenhang) sind bereits im Diagramm aus Teil 1 dargestellt.

3. Der Vergleich der theoretischen, mit Gleichung (1) berechneten Werte und denen aus Tabelle 3 liefert folgende Tabelle:

W (in 10^6V)	0,5	1	1,5
$\left(\frac{v}{c}\right)^2_{Experimentell}$	$0,751$	$0,851$	$0,939$
$\left(\frac{v}{c}\right)^2_{relativistisch}$	$0,745$	$0,886$	$0,935$
abs. Fehler	$0,006$	$-0,035$	$0,004$
rel. Fehler	0,8%	-4,0%	0,4%

Tabelle 4: Fehlerrechnung

4. Für diesen Punkt benötigt man die Umrechnung von eV in J: $1eV = 1,602 \times 10^{-19}J$. Die Gesamtenergie des Elektronenbündels ist auf $n = \frac{\text{Gesamtladung}[C]}{\text{Elementarladung}[C]}$ Elektronen aufgeteilt, weshalb die kinetische Energie pro Elektron gegeben ist durch

$$\begin{aligned} E_{kin}[eV] &= \frac{\text{Energie des Bündels}\,[eV]}{n} \\ &= \frac{\text{Energie des Bündels}\,[eV]}{1} \cdot \frac{\text{Elementarladung}\,[C]}{\text{Gesamtladung}\,[C]} \\ &= \frac{\text{Energie des Bündels}\,[J]}{\text{Elementarladung}\,[C]} \cdot \frac{\text{Elementarladung}\,[C]}{\text{Gesamtladung}\,[C]} \\ &= \frac{\text{Energie des Bündels}\,[J]}{\text{Gesamtladung}\,[C]} \end{aligned}$$

bzw.

$$E_{kin}[MeV] = \frac{\text{Energie des Bündels}\,[J]}{\text{Gesamtladung}\,[\mu C]},$$

womit man folgende Tabelle aufstellen kann.

Potentialdifferenz (in 10^6V)	1,5	4,5
Energie des Elektronenbündels (J)	10,0	29,2
Ladung des Elektronenbündels (µC)	6,1	6,1
kinetische Energie pro Elektron (MeV)	1,6	4,8

Tabelle 5: Ergebnisse zweite Phase

Auffallend ist, dass die kinetische Energie pro Elektron größer ist als die Potentialdifferenz liefern kann. Dies ist entweder auf eine bereits vorhandene Bewegungsenergie der Elektronen von der Erzeugung zurückzuführen und/oder dass das Ladungsmessgerät zuwenig Ladungen registriert. Wenn man diese Diskrepanz ignoriert, so ist doch gut ersichtlich, dass die von den Beschleunigern gelieferte Energie in Bewegungsenergie umgewandelt wurde und nicht in Verluste "geflossen" ist.