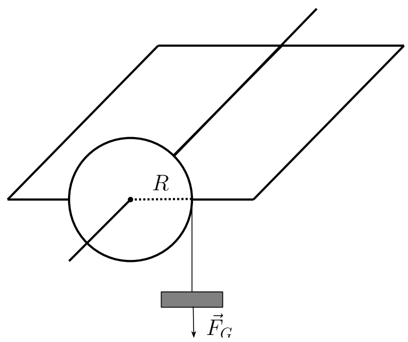
**Problem 1:**

1. Die Lorentzkraft erzeugt an den Enden der Spulen eine Spannung, da das Magnetfeld auf die Ladungen, die sich durch die Rotation bewegen, eine Kraft ausübt. Die frei beweglichen Ladungen im Draht (Elektronen) werden dadurch verschoben, es kommt zu einer Ladungstrennung.
   Die induzierte Spannung lässt sich mit dem Induktionsgesetz von Faraday (1831) berechnen: Durch die Rotation wird der Winkel zwischen dem Magnetfeld $\vec{B}$ und der Fläche $\vec{A}$ der Spule geändert, somit ändert sich der magnetische Fluss $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \sphericalangle(\vec{B}; \vec{A})$. Bezeichnen wir den Winkel $\sphericalangle(\vec{B}; \vec{A})$ mit $\varphi$, dann gilt für die induzierte Spannung $U_{ind} = -N\dot{\Phi} = -NBA(\dot{\cos(\varphi)}) = NBA\sin(\varphi)\dot{\varphi}$
   Da sich der Winkel $\varphi$ zeitlich ändert, entsteht eine Spannung.
   Die Gewichtskraft beschleunigt die Masse, wodurch die Fallgeschwindigkeit zunimmt. Dadurch erhöht sich auch die Rotationsgeschwindigkeit.
   Im Graphen erkennen wir das an der kleiner werdenden Rotationsdauer. Außerdem erhöht sich durch die schnellere Änderung des magnetischen Flusses $\Phi$ die Amplitude der induzierten Spannung.

2. Die Gewichtskraft der fallenden Masse übt ein Drehmoment $M = F_G \cdot R$ auf die rotierende Anordnung aus. Dieses ändert den Drehimpuls $L = J \cdot \omega$. Die prinzipielle Anordnung wird in der Zeichnung veranschaulicht.




   Es gilt allgemein: $M = \dot{L} = (\dot{J \cdot \omega}) = J \cdot \dot{\omega} = J \cdot \alpha$
   mit $J$ dem Trägheitsmoment der rotierenden Anordnung, $\omega$ der Winkelgeschwindigkeit und $\alpha$ der Winkelbeschleunigung.
   $M = J \cdot \alpha \Rightarrow F_G \cdot R = J \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{F_G \cdot R}{J} =$ konstant!
   Damit haben wir gezeigt, dass die Anordnung mit konstanter Winkelbeschleunigung rotiert.
   Für die Winkelgeschwindigkeit gilt: $\dot{\omega} = \alpha \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
   Da die Spule zur Zeit $t = 0$ nicht rotiert, ist $\omega_0 = 0$ und $\omega = \alpha \cdot t$
   Für den Winkel $\varphi$ gilt: $\dot{\varphi} = \omega \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$, wie wir durch Ableiten leicht bestätigen können.
   Setzen wir den Winkel zur Zeit $t = 0$ gleich 0, dann gilt:
   $\varphi = \dfrac{1}{2}\alpha t^2$
   Somit finden wir mit Hilfe des Induktionsgesetzes:

$$U_{ind} = NBA\sin(\varphi)\dot{\varphi} = NBA\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\alpha t$$

   Die Nullstellen dieser Funktion liegen bei $\dfrac{1}{2}\alpha t^2 = k\pi; k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow t_k = \sqrt{\dfrac{2k\pi}{\alpha}}$
   Der zeitliche Abstand zwischen zwei Nullstellen beträgt eine halbe Schwingungsdauer.
   $T_{k;\frac{1}{2}} = t_{k+1} - t_k = \sqrt{\dfrac{2(k+1)\pi}{\alpha}} - \sqrt{\dfrac{2k\pi}{\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\alpha}} \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) =$
   $= \sqrt{\dfrac{2\pi}{\alpha}} \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\alpha}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$
   Der Nenner wächst mit zunehmendem $k$, also nimmt die halbe Schwingungsdauer ab.
   Die Amplitude der Spannung (das ist die einhüllende Funktion, da der Sinus zwischen $-1$ und $1$ pendelt,

vergleiche die Amplitude bei der Schwebung!) ist $NBA\alpha t$. Sie wächst also proportional zur Zeit $t$. Beide Tatsachen stimmen mit den Messdaten überein.

3. Wir bestimmen die Maßstäbe in unserem Diagramm, um Zeiten und Spannungen ablesen zu können:
$1\,s \mathrel{\widehat{=}} ...\,cm$
$0{,}1\,V \mathrel{\widehat{=}} ...\,cm$
Zunächst bestimmen wir $\alpha$ durch die Nullstellen unserer Funktion. Für die Nullstellen gilt $\frac{1}{2}\alpha t^2 = 2\pi; k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{t^2}$. Die letzte Nullstelle liegt bei $t = 0{,}94s, k = 23$ (abzählen!).
$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 23 \cdot \pi}{(0{,}94\,s)^2} = 163{,}6s^{-2}$

Jetzt fehlt noch die magnetische Flussdichte $B$, die in der Formel für die induzierte Spannung vorkommt. Für die Extrempunkte (Punkte maximaler Elongation) gilt, dass der Sinusterm dem Betrag nach fast 1 ist.
Genauer erhalten wir die Zeiten, indem wir die Lösungen von $\dot{U_{ind}} = 0$ bestimmen:
$\dot{U_{ind}} = NAB\alpha\left(\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + t\alpha t \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right)\right) = 0.$
$\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + t\alpha t \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right) = 0 \Rightarrow \frac{-\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}{\alpha t^2} = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right)$ Für zunehmende Zeiten $t$ strebt der Term auf der rechten Seite gegen 0, daher auch der linke Term. In unserem Beispiel befindet sich das Extremum bei $t \approx 0{,}93\,s; \alpha = 163{,}6s^{-2} \Rightarrow \frac{-\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}{\alpha t^2} = -0{,}0066 = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t\right)$. Falls der Cosinusterm gegen 0 strebt, strebt der Sinusterm gegen 1 (vgl. $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$). Bei uns hat der Sinusterm mit den angegebenen Messdaten den Wert 0,998, also fast 1. Damit ergibt sich bei den Extremstellen

$$U_{ind} = NBA \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\alpha t \approx NBA\alpha t$$

Wir formen auf die gesuchte magnetische Flussdichte um: $B = \frac{U_{ind}}{NA\alpha t}$ Für das letzte Maximum (hier können wir sehr genau ablesen) erhalten wir: $t = 0{,}93\,s; U_{ind} = 0{,}21\,V$
Eingesetzt erhalten wir $B = \frac{0{,}21\,s}{100 \cdot 0{,}25\,m \cdot 0{,}30\,m \cdot 163{,}6s^{-2} \cdot 0{,}93\,s} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\frac{Vs}{m^2} = 0{,}18mT$, das ist in etwa 4 Mal so stark wie das Magnetfeld in unseren Breitengraden (Äquator ca. $0{,}25\,mT$, Pole ca. $0{,}7\,mT$).

4. Die eingezeichnete Fläche wird durch die Spannungsfunktion und die Verbindung von zwei Nullstellen begrenzt.
Mathematisch wird die Fläche durch das folgende Integral bestimmt: $A = \int_{t_k}^{tk+1} U_{ind}\mathrm{d}t = \int_{t_k}^{tk+1} -N\dot{\Phi}\mathrm{d}t$
Die Definition des Integrals besagt, dass die Integration der Ableitungsfunktion die Funktion selbst ergibt.
$\int_{t_k}^{tk+1} -N\dot{\Phi}\mathrm{d}t = \Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k)$
Wir wissen bereits: $t_k = \sqrt{\frac{2k\pi}{\alpha}}; t_{k+1} = \sqrt{\frac{2(k+1)\pi}{\alpha}}$
$\Phi = -NBA\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \Rightarrow \Phi(t_k) = -NBA\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\frac{2k\pi}{\alpha}\right) = -NBA \cdot \cos(k\pi)$
In unserem Fall ist $k = 4$ und $k + 1 = 5$ ($k$ startet bei 0). Daher gilt für die Fläche $A = \Phi(t_5) - \Phi(4) = -NBA \cdot \cos(5\pi) - (-NBA \cdot \cos(4\pi)) = NBA + NBA = 2NBA$
Allgemein unterscheiden sich die magnetischen Flüsse bei zwei benachbarten Nullstellen nur durch das Vorzeichen.
Für die Fläche gilt allgemein: $A = \Phi(t_{k+1}) - \Phi(t_k) = -NBA(\cos((k+1)\pi) - \cos(k\pi)) = -NBA(-2\sin\frac{(k+1)\pi + k\pi}{2}\sin\frac{(k+1)\pi - k\pi}{2} = 2NBA\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2NBA\cos(k\pi)$
Der Cosinusterm ist entweder 1 oder $-1$: Für gerade $k$ erhalten wir eine positive Fläche, für ungerade $k$ eine negative.