PROBLEM 1: Die Reiseschuhtasche

Ein Handwerker will Reisebehälter für Schuhe herstellen und sieht Behälter mit einer ebenen Grundfläche und einer variablen Höhe, deren Profil sich der Form des Schuhs anpasst, vor.

Der Handwerker geht zur Planung des Profils über und legt fest, dass besagte Behälter eine rechteckige Grundfläche von 20 cm mal 30 cm haben und dass die Höhe im Längsschnitt von 0 bis 30 cm folgenden Verlauf hat: Am einen Ende bei der Schuhspitze ist die Höhe 4 cm. 10 cm von der Schuhspitze entfernt ändert sich die Krümmung und die Höhe erreicht 8 cm. 20 cm von der Schuhspitze entfernt erreicht die Höhe 12 cm. Am anderen Ende bei 30 cm jedoch ist die Höhe null.

Bevor er mit der Produktion eines Prototypen fortfährt, will der Handwerker seines Projektes sicher sein. Er weiß, es sind mathematische Kompetenzen nötig, um die Gewissheit zu haben, dass der mit diesem Profil entworfene Behälter verschiedene Schuhtypen enthalten kann.

Er bittet Sie daher, die mathematische Modellierung des Profils des Prototypen vorzunehmen:

1. Wählen Sie ein kartesisches Koordinatensystem *Oxy*, in dem die Maßeinheit einem Dezimeter entspricht und ermitteln Sie unter folgenden Funktionen jene Funktion, die dem beschriebenen Profil am besten entspricht und begründen Sie Ihre Antwort:

$$y = e^{(ax^2+bx+c)} + (x+d)^2 \qquad a,b,c,d \in R, x \in [0,3]$$

$$y = \frac{\sin^2(ax+b)+\cos^2(ax+b)}{cx+d} \qquad a,b,c,d \in R, x \in [0,3]$$

$$y = ax^3+bx^2+cx+d \qquad a,b,c,d \in R, x \in [0,3]$$

2. Nachdem Sie die Funktion bestimmt haben, die das Profil am besten beschreibt, bestimmen Sie die Parameter *a, b, c* und *d* aufgrund der vom Handwerker oben festgelegten Größen.
3. Untersuchen Sie diese Funktion, stellen Sie sie grafisch im kartesischen Koordinatensystem *Oxy* dar und überprüfen Sie, ob der Behälter für einen 14 cm hohen Schuh verwendet werden kann.

Der Handwerker beschließt, auch die Verkaufsbedingungen des Produkts zu überprüfen. Die Produktionskosten liegen bei 5 € pro Behälter plus 500 € monatliche Fixkosten. Aufgrund seiner Marktkenntnisse geht er davon aus, jeden Behälter für 15 € verkaufen zu können, und stellt er sich vor, das Verhältnis von Ertrag zu Kosten unbegrenzt steigern zu können, indem er die Anzahl der produzierten Behälter pro Monat immer mehr erhöht.

4. Zeigen Sie, dass dies nicht zutrifft und zeichnen Sie, um dem Handwerker das mathematische Ergebnis zu veranschaulichen, den Verlauf des Verhältnisses von Ertrag zu Kosten in Abhängigkeit von der Anzahl der produzierten Behälter pro Monat.

PROBLEMSTELLUNG 2: Das Eis

Ihr Gymnasium hat im Rahmen der Zusammenarbeit Schule–Arbeitswelt eine Tätigkeit für Schüler und Schülerinnen der 5. Klassen im Betrieb ICE ON DEMAND in Ihrer Region organisiert. Nach der Ankunft wurden Sie in mehrere Gruppen aufgeteilt. Nachdem Ihre Gruppe die Betriebsanlage und die Labors besichtigt hat, nimmt sie an einer Sitzung über die Produktionsprozesse teil.

Ein Kunde hat eine Lieferung von Eisblöcken in Form von geraden Prismen mit quadratischer Grundfläche und einem Volumen von 10 dm^3 beantragt. Die Eisblöcke sollen eine möglichst geringe Wärmeübertragung mit der Umgebung aufweisen, um dem Schmelzen so lange wie möglich standzuhalten.

Ihrer Gruppe wird die Aufgabe gestellt, die geometrischen Eigenschaften der zu produzierenden Blöcke zu bestimmen; in der Annahme, dass die Wärmeübertragung mit der Umgebung über die Oberfläche der Blöcke erfolge.

1. Untersuchen Sie die Funktion, die die Oberfläche des Quaders als Funktion der Seitenkante b der quadratischen Grundfläche ausdrückt, und stellen Sie sie grafisch dar.
2. Bestimmen Sie den Wert von *b*, der die Wärmeübertragung auf ein Minimum reduziert, und den dazugehörigen Wert der Höhe *h*. Kommentieren Sie das erhaltene Ergebnis.

Die Temperatur des Eisblocks beträgt am Ende des Produktionsprozesses, gleichförmig im gesamten Block, − 18°C. Der Block wird auf ein Transportband gelegt, das ihn zu einem Kühllastwagen befördert. Dabei durchquert er zwei Minuten lang eine Umgebung, die auf 10°C gehalten wird. Deswegen neigt der Block sich zu erwärmen, und zwar in fortlaufend abnehmendem Maß, in Abhängigkeit von der Differenz seiner Temperatur zu jener der Umgebung.

3. Wählen Sie eine der folgende Funktionen, um den Erwärmungsvorgang vor dem Schmelzen zu modellieren (T_u Umgebungstemperatur, T_e Anfangstemperatur des Eises, $T(t)$ Temperatur des Eisblocks zum Zeitpunkt t, mit t der vergangenen Zeit vom Beginn der Erwärmung, in Minuten):

   $$T(t) = (T_e - T_u)\ e^{-Kt}$$

   $$T(t) = (T_u - T_e) \cdot (1 - e^{-Kt}) + T_e$$

   $$T(t) = (T_u - T_e)\ e^{-Kt} - T_u$$

   Bestimmen Sie den Wert, den der auch von den Produktionsprozessen abhängige Parameter *K* haben muss, damit der Eisblock auf dem Weg zum Kühllastwagen nicht zu schmelzen beginnt.

Der Betrieb verwendet, um das nötige Wasser zur Herstellung eines einzelnen Eisblocks aufzunehmen, meistens einen Behälter in Form eines Kegelstumpfes mit dem Radius der kleineren Kreisfläche gleich 1 dm, dem Radius der größeren Kreisfläche gleich 1,5 dm und der Höhe gleich 2 dm.

4. Beim Übergang von Wasser zu Eis steige das Volumen um 9,05%. Berechnen Sie, ob der genannte Behälter imstande ist, das zur Herstellung des Eisblockes nötige Wasser aufzunehmen, und wenn ja, bis auf welche Höhe (von der Grundfläche des Behälters aus) das Wasser reichen wird.

Simulation der zweiten schriftlichen Arbeit aus Mathematik
für die Staatliche Abschlussprüfung an den Realgymnasien - 10. Dezember 2015
Bearbeiten Sie ein Problem und 5 Fragen nach Ihrer Wahl
Arbeitszeit: maximal 6 Stunden

FRAGEN:

1. Ein Paar Spielwürfel wird fünf Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augensumme mindestens zwei Mal größer als sieben ist?

2. Bestimmen Sie für die Parabel mit der Gleichung $y = 4 - x^2$ die Gleichungen der Tangenten an die Parabel im Punkt mit Abszisse 2 und im Punkt, der bezüglich der Symmetrieachse der Parabel dazu symmetrisch liegt.

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die im Punkt [1; 1;1] senkrecht zur Ebene mit der Gleichung $2x - 3y + z = 0$ steht.

4. Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - kx + h & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Parameter h und k so, dass $f(x)$ im gesamten Intervall $[0;4]$ ableitbar ist.

5. Bestimmen Sie die Gleichung der schiefen Asymptote der Funktion:

$$f(x) = \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

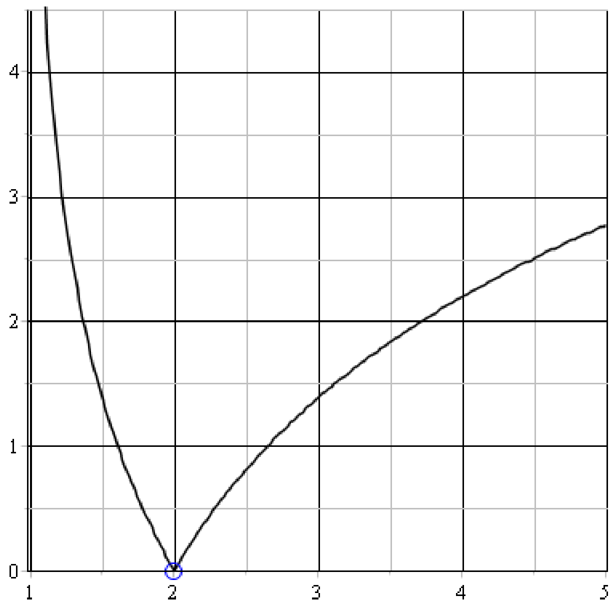
6. Lösen Sie folgende Gleichung:
$$6 \cdot \binom{x}{5} = \binom{x+2}{5}$$

7. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ den Definitionsbereich und ermitteln Sie die eventuelle senkrechte Asymptote.

8. Bestimmen Sie, indem Sie die Definition verwenden, die erste Ableitung der Funktion $y = \sin 2x$, und verallgemeinern Sie das Ergebnis zu $y = \sin nx$ mit $n \in \mathbb{N}$.

9. Ein Gegenstand wird in die Höhe geworfen. Die Weg-Zeit-Funktion seiner Bewegung lautet $h(t) = 40t - 2t^2$, mit der Höhe h in Metern. Bestimmen Sie die Geschwindigkeits-Funktion und die maximal erreichte Höhe des Gegenstands.

10. Analysieren Sie den Graph der Funktion $y = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$ und untersuchen Sie die Unstetigkeitspunkte:



Geben Sie, nachdem Sie die Art der Unstetigkeit festgelegt haben, den Funktionsterm an, der durch die Behebung der Unstetigkeit erhalten werden kann.