Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Arbeit aus: Mathematik und Physik
Der Kandidat/die Kandidatin soll eines der beiden Probleme lösen
und vier der acht Fragen beantworten!

Problemstellung 1:

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$q(t) = a\,t \cdot e^{b\,t}$$

wobei a und b reelle Konstanten sind und $a > 0$ gilt.

1. Untersuchen Sie in Abhängigkeit von den möglichen Werten der Konstanten a und b, ob der Graph der Funktion q einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt besitzt!
   Bestimmen Sie die Werte von a und b, für die der Graph der Funktion $q(t)$ in einem Kartesischen Koordinatensystem mit den Koordinaten $(t; q)$ einen Hochpunkt in $B\left(2; \frac{8}{e}\right)$ hat!

2. Nun werden die Konstanten wie folgt festgelegt: $a = 4$; $b = -\frac{1}{2}$
   Untersuchen Sie die Funktion
   $$q(t) = 4\,t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$
   und weisen Sie insbesondere nach, dass im Punkt $W\left(4; \frac{16}{e^2}\right)$ ein Wendepunkt vorliegt!
   Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen im Wendepunkt W!

3. Die Funktion $q(t)$ soll für $t \geq 0$ die elektrische Ladung (gemessen in C) darstellen, die zum Zeitpunkt t (gemessen in s) durch die Querschnittsfläche eines Leiters fließt.
   Bestimmen Sie die physikalischen Dimensionen der obigen Konstanten a und b!
   Es gelte weiterhin $a = 4$ und $b = -\frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Größe des Stromes $i(t)$, der zum Zeitpunkt t durch den Leiter fließt!
   Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert dieses Stromes! Gegen welchen Wert strebt der Strom mit der Zeit?

4. Für $t_0 \geq 0$ sei $Q(t_0)$ die gesamte Ladung, die in einem Zeitintervall $[0; t_0]$ durch eine bestimmte Querschnittsfläche des Leiters fließt.
   Bestimmen Sie, gegen welchen Wert $Q(t_0)$ für $t_0 \to +\infty$ strebt!
   Der elektrische Widerstand des Leiters sei $R = 3\Omega$. Schreiben Sie ein Integral an (ohne es zu berechnen), das die umgesetze Energie im Zeitintervall $[0; t_0]$ angibt!

Problemstellung 2

Eine punktförmige elektrische Ladung $Q_1 = 4q$ (q ist positiv) wird im Ursprung O eines Bezugssystems der Ebene Oxy fixiert. Dabei werden x und y in m angegeben. Eine zweite punktförmige elektrische Ladung $Q_2 = q$ kann sich nur entlang der Geraden g mit der Geradengleichung $y = 1$ bewegen.

1. Die Ladung Q_2 befinde sich im Punkt $A(0; 1)$. Zeigen Sie, dass es einen einzigen Punkt P der Ebene gibt, in dem das elektrostatische Feld, das von den beiden Ladungen Q_1 und Q_2 erzeugt wird, gleich null ist!
   Bestimmen Sie die Lage des Punktes P und besprechen Sie, ob sich eine dritte Ladung im Punkt P in einem elektrostatisch stabilen oder labilen Gleichgewicht befindet!

2. Die Ladung Q_2 befinde sich auf der Geraden g, die Abszisse des Geradenpunktes sei x. Zeigen Sie, dass dann die elektrostatische potentielle Energie des Systems, das von Q_1 und Q_2 gebildet wird, gleich folgendem Ausdruck ist:

$$E_{pot}(x) = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

   wobei k eine positive Konstante darstellt (Einheit: Nm^2/C^2).

3. Untersuchen Sie die Funktion $E_{pot}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, indem Sie mögliche Symmetrien, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte bestimmen! Bestimmen Sie die Steigungen der Tangenten in den Wendepunkten!

4. Zeichnen Sie den Graphen von E'_{pot}, wobei Sie vom Graphen von E_{pot} ausgehen!
   Bestimmen Sie mögliche Symmetrieeigenschaften!
   Berechnen Sie den Wert von $\int\limits_{-m}^{m} E'_{pot}(x)dx$, wobei $m > 0$ die Abszisse des Minimums von E'_{pot} bezeichnet.

Fragen

1. Bestimmen Sie die Werte für a und b so, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{für } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

   im gesamten Definitionsbereich ableitbar ist. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g und g'.

2. $\mathcal{R}$ sei der Bereich zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $y = 2e^{1-|x|}$. In diesen Bereich sollen Rechtecke so eingeschrieben werden, dass eine Rechteckseite auf der x-Achse liegt. Zeigen Sie, dass von diesen eingeschrieben Rechtecken dasjenige mit dem größtmöglichen Flächeninhalt auch den kleinsten Umfang besitzt und ein Quadrat ist!

3. Eine Schachtel enthält 16 Kugeln, welche von 1 bis 16 durchnummeriert sind.
   a) Es werden hintereinander 3 Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel jedes Mal wieder zurückgelegt wird.
      Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel die Nummer 10 hat und die nächsten beiden jeweils einen Wert unter 10 haben?

b) Es werden gleichzeitig 5 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die größte der gezogenen Nummern 13 ist?

4. Finden Sie eine gebrochen-rationale Funktion $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, wobei $s(x)$ und $t(x)$ Polynomfunktionen sind, so dass ihr Graph folgende Bedingungen erfüllt! Begründen Sie Ihre Wahl!
   - Der Graph hat gemeinsame Punkte mit der x-Achse. Die Abszissen sind -1 und 2. Bei der Abszisse 2 ist die x-Achse Tangente des Graphen.
   - Der Graph hat die vertikalen Asymptoten $x = -3$ und $x = 1$.
   - Der Graph geht durch den Punkt $P(7; 10)$.

   Zeichnen Sie qualitativ den Graphen der gefundenen Funktion!

5. Gegeben ist die Kugeloberfläche S mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
   - Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius der Kugel!
     Zeigen Sie dass sich die Ebene π mit Gleichung $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ und die Kugeloberfläche S schneiden!
   - Bestimmen Sie den Radius des Kreises, der durch den Schnitt von π und S entsteht!

6. Ein Massenpunkt bewegt sich für $t \geq 0$ geradlinig nach folgendem Weg-Zeit-Gesetz

$$x(t) = \frac{1}{9}t^2 \left(\frac{1}{3}t + 2\right)$$

   wobei $x(t)$ (in m) die Position des Massenpunktes zum Zeitpunkt t (in s) angibt.
   Handelt es sich dabei um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung?
   Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 9 Sekunden der Bewegung und den Zeitpunkt, zu dem sich der Massenpunkt mit dieser Geschwindigkeit bewegt!

7. Eine Kugel der Masse m stößt mit der Geschwindigkeit v zentral gegen eine zweite Kugel der Masse $3m$, die sich anfänglich in Ruhe befindet.

   a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln nach dem Stoß, wenn es sich um einen vollkommen elastischen Stoß handelt!

   b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln nach dem Stoß, wenn es sich um einen vollkommen unelastischen Stoß handelt!
   Geben Sie für diesen Fall an, wie viel kinetischen Energie verloren geht!

8. Die Stärke eines Magnetfeldes wird durch die Gleichung $B(t) = B_0(2 + \sin(\omega t))$ beschrieben, wobei t die Zeit angibt. Es durchsetzt senkrecht eine quadratische Leiterschleife mit der Seitenlänge l. R sei der elektrische Widerstand der Leiterschleife. Bestimmen Sie für den Zeitpunkt t die induzierte Spannung und den induzierten Strom in der Leiterschleife!
   Geben Sie die Einheiten aller auftretenden physikalischen Größen an!

Maximale Dauer der Arbeit: 6 Stunden
Der Gebrauch eines wissenschaftlichen und/oder eines graphikfähigen Taschenrechners ist erlaubt, solange er nicht ein CAS besitzt (M.V. Nr. 350 Art.18 Komma 8).