

Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca
ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

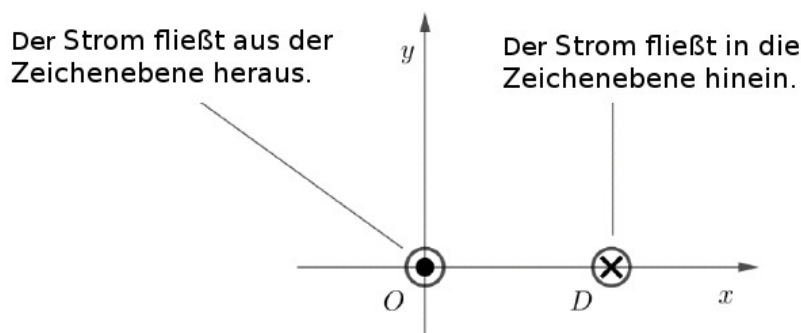
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Arbeit aus: Mathematik und Physik am 2. April 2019

Der Kandidat/die Kandidatin soll eines der beiden Probleme lösen
und vier der acht Fragen beantworten!

Problemstellung 1:

Zwei unbewegliche gerade, parallele Leiter, haben einen konstanten Abstand von 1 m und unendliche Länge. Sie werden von konstanten Strömen durchflossen, die betragsmäßig gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. I ist die Stärke des Stromes, ausgedrückt in Ampere (A). Man betrachtet eine Ebene, die senkrecht zu den beiden Leitern ist und auf der ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy festgelegt ist. Die Längen sind dabei in Meter (m) ausgedrückt. Ein Leiter geht durch den Ursprung O , der zweite durch den Punkt $D(1;0)$ (siehe Skizze).



1. Zeigen Sie, dass die Stärke des Magnetfeldes \vec{B} , ausgedrückt in Tesla (T) in einem Punkt $P(x;0)$ mit $0 < x < 1$ durch folgende Funktion gegeben ist

$$B(x) = K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right)$$

Dabei ist K eine positive Konstante. Bestimmen Sie ihre Einheit!

Bestimmen Sie die Richtung des Vektors \vec{B} für x -Werte im Intervall $(0; 1)$!

Für welche x -Werte ist die Stärke des Magnetfeldes \vec{B} minimal?

2. Eine punktförmige Ladung q durchquert das Magnetfeld. In einem bestimmten Augenblick passiert sie mit einer Geschwindigkeit v_0 den Punkt $C(\frac{1}{2}; 0)$ in Richtung der Geraden $x = \frac{1}{2}$. Beschreiben Sie die Bewegung, die aufgrund des Magnetfeldes erfolgt, das durch die beiden Ströme erzeugt wird! Begründen Sie Ihre Aussage!

Bestimmen Sie die Stärke und die Richtung des Magnetfeldes \vec{B} in den Punkten der x -Achse, die außerhalb des Segmentes OD liegen!

Gibt es auf der x -Achse Punkte, bei denen das Magnetfeld \vec{B} null ist?

3. Das Problem wird von der Physik losgelöst.

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right)$$

Zeigen Sie speziell, dass der Graph dieser Funktion keine Wendepunkte besitzt!

Geben Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen f im Punkt mit Abszisse $\frac{1}{3}$ an und bestimmen Sie die Koordinaten des anderen Schnittpunktes der Tangente t mit dem Graphen der Funktion f !

4. Berechnen Sie den Wert des Integrales

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x) dx$$

und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Bestimmen Sie folgendes Integral für $t \geq 2$:

$$g(t) = \int_2^t |f(x)| dx$$

und berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$. Was drückt dieser Grenzwert aus?

Problemstellung 2

k ist eine reelle, positive Zahl. Betrachten Sie die Funktionen f und g , die folgendermaßen definiert sind:

$$f(x) = \sqrt{x}(k-x)$$

$$g(x) = x^2(x-k)$$

1. Zeigen Sie, dass für ein beliebiges $k > 0$ der Graph der Funktion f im Intervall $[0; k]$ einen einzigen Hochpunkt $F(x_F; y_F)$ hat und der Graph der Funktion g im gleichen Intervall einen einzigen Tiefpunkt $G(x_G; y_G)$ hat.

Zeigen Sie weiters, dass $x_G = 2x_F$ und $y_G = -(y_F)^2$.

2. Zeigen Sie, dass für beliebiges $k > 0$ die Graphen der beiden Funktionen im Ursprung zueinander orthogonal sind, das heißt, dass die beiden Tangenten in diesem Punkt zueinander senkrecht stehen!

Bestimmen Sie, für welchen positiven Wert von k die beiden Graphen sich auch im zweiten gemeinsamen Punkt senkrecht schneiden!

Ab hier wird $k = 1$ gesetzt. In einem Kartesischen Koordinatensystem, bei dem die Längen in Metern (m) ausgedrückt werden, bilden die beiden Bögen der Kurven mit den Funktionsgleichungen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ für $x \in [0; 1]$ das Profil einer metallischen Leiterschleife. A sei der Bereich der Ebene, der von dieser Leiterschleife eingeschlossen wird.

3. Im Bereich A wirke ein homogenes Magnetfeld, das senkrecht zur Ebene von A steht und dessen Stärke $B_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}$ T beträgt.

Zeigen Sie, dass der gesamte Fluss dieses Feldes durch A gleich $7,0 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ beträgt!

4. Die Spule habe einen elektrischen Widerstand $R = 70 \Omega$. Das Magnetfeld bleibt senkrecht zur Fläche A , beginnt sich aber ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ s nach folgendem Gesetz zeitlich zu verändern:

$$B(t) = B_0 e^{-\omega t} \cos(\omega t) \text{ mit } \omega = \pi \text{ rad/s}$$

Es gilt $t \geq 0$, t wird in Sekunden (s) ausgedrückt. Drücken Sie die Stärke des Stromes, der in der Leiterschleife induziert wird, in Funktion von t aus!

Zu welchem Zeitpunkt wechselt der Strom das erste Mal seine Richtung?

Wie groß ist der Maximalwert dieses Stromes für $t \geq 0$?

Erklären Sie, welcher Zusammenhang zwischen der Änderung des Feldes, die den Strom hervorruft, und der Richtung des induzierten Stromes besteht!

Fragen

1. Gegeben sei $k \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie die Funktion, die folgendermaßen definiert ist:

$$g(x) = \frac{(k-1)x^3 + kx^2 - 3}{x-1}$$

- Wie muss der Wert von k gewählt werden, damit der Graph von g keine Asymptoten hat?
- Wie muss der Wert von k gewählt werden, damit der Graph von g eine schräge Asymptote hat?

Begründen Sie Ihre Antworten und stellen Sie für die beiden Fälle die Graphen der ermittelten Funktionen dar!

2. Sei f eine gerade Funktion, die in \mathbb{R} ableitbar ist, g sei eine ungerade Funktion, die ebenfalls in \mathbb{R} ableitbar ist.

Zeigen Sie, dass die Funktion f' ungerade ist und die Funktion g' gerade ist!

Geben Sie ein Beispiel für die Funktion f und eines für die Funktion g an. Bestätigen Sie damit die Aussagen!

3. Betrachten Sie die Funktion $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die folgendermaßen definiert ist:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t} dt$$

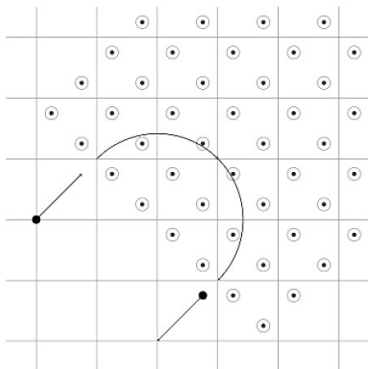
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt mit der Abszisse 1.

4. Im dreidimensionalen Raum sei g die Gerade, die durch die Punkte $A(-2; 0; 1)$ und $B(0; 2; 1)$ geht. Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes der Geraden g , der gleich weit von den Punkten $C(5; 1; -2)$ und $D(1; 3; 4)$ entfernt ist!
5. Emma spielt mit einem Würfel, dessen Seitenflächen mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind. Würfelt sie eine 3, dann bekommt sie drei Punkte, ansonsten verliert sie einen Punkt. Sie startet mit null Punkten.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Punktestand nach vier Würfeln gleich null ist?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Punktestand bei sechs Würfeln nie unter null sinkt?

6. An den Ecken des Quadrates $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 2 m sind vier elektrische Ladungen angebracht. Die Ladung in A ist 9 nC, in B ist sie 2 nC, in C ist sie 4 nC und in D ist sie -3 nC. Die Ladungen befinden sich im Vakuum.

Bestimmen Sie die Stärke und die Richtung des elektrostatischen Feldes, das von den vier Ladungen im Mittelpunkt des Quadrates erzeugt wird!

7. Ein Proton, das sich anfänglich in Ruhe befindet, wird durch eine Spannung von 400 V beschleunigt und tritt anschließend in einen Raumbereich ein, in dem ein homogenes magnetische Feld herrscht. Das Feld steht senkrecht zur Geschwindigkeit des Protons.



Die Skizze zeigt die halbkreisförmige Bahn, die vom Proton durchlaufen wird. Die Quadrate haben eine Seitenlänge von $1,00\text{ m}$.

Bestimmen Sie die Stärke von \vec{B} !

8. Es wird versucht, Elektronen aus metallischen Platten, die aus verschiedenen Materialien bestehen, herauszulösen, indem man diese Platten mit einer Strahlung der Frequenz $7,80 \cdot 10^{14}\text{ Hz}$ beleuchtet.

Bestimmen Sie unter den angegebenen Materialien das einzige, das für diesen Zweck geeignet ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Material	Austrittsarbeit
Silber	$4,8\text{ eV}$
Cäsium	$1,8\text{ eV}$
Platin	$5,3\text{ eV}$

Nachdem Sie das geeignete Material ermittelt haben, berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit, die ein Elektron bei der Emission haben kann!

Physikalische Konstanten		
Elementarladung	e	$1,602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$
Planck-Konstante	h	$6,626 \cdot 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}$
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12}\text{ As}/(\text{Vm})$
Masse des Elektrons	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$
Masse des Protons	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$

Maximale Dauer der Arbeit: 6 Stunden

Der Gebrauch eines wissenschaftlichen und/oder eines grafikfähigen Taschenrechners ist erlaubt, solange er nicht ein CAS besitzt (M.V. Nr. 350 Art.18 Komma 8).