Frage 6

Die Energie eines Elektron, welches entsprechend dem Bohrschen Atommodell eine erlaubte Bahn im Wasserstoffatom besetzt, ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$E_n = -\frac{13{,}6\,eV}{n^2} \qquad \text{mit} \qquad n = 1{,}2{,}3...$$

Zu bestimmen ist die Geschwindigkeit und der Radius der Bahn des Elektrons, wenn dieses sich auf dem ersten angeregten Niveau des Atoms befindet.

Lösung: Da von den erlaubten Bahnen im Rahmen des Bohr'schen Atommodel gesprochen wird erfolgt die Berechnung teilweise **klassisch** (also ohne die Verwendung der Schrödingergleichung und der Bestimmung der Erwartungswerte für Ort und Geschwindigkeit). Die Coulombkraft zwischen Elektron und Atomkern (Proton) ist die Zentripetalkraft, die die Elektronen auf die Kreisbahn *zwingt* (in Beträgen):

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = m_e \cdot r \cdot \omega^2 \qquad \left(\text{bzw.:} \quad \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r}\right)$$

Die Energie des Elektrons besteht aus der mit der Bahnbewegung verknüpften *kinetische Energie* und der *potentiellen Energie* des Elektrons im vom Kernproton erzeugten elektrischen Feld (bezogen auf einen Punkt in unendlicher Entfernung):

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot r^2 \cdot \omega^2 - q_e \cdot \frac{q_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad \overset{m_e \cdot r \cdot \omega^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0 \cdot r^2)}{\Longrightarrow} \quad E = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Bis hier sind die Herleitungen klassisch. Nun erfolgen weitere *"halbklassische"* Schritte. Die Energie $E_{n=2}$ des Elektrons ist **quantisiert** (siehe Angabe) und im ersten angeregten Zustand $n = 2$ bekannt:

$$E_2 = -\frac{13{,}6\,eV}{4} = -3{,}4\,eV$$

Die vorhergehende Gleichung wird deshalb auf r umgestellt und mit E_2 wird r berechnet:

$$E_2 = -\frac{q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot E_2} = -\frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C)^2}{8 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm} \cdot -3{,}4 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J} = 212\,pm$$

Die Bahngeschwindigkeit wird wieder klassisch gerechnet:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{Bahn} = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e \cdot r}} = 1094000\,\frac{m}{s}$$

Einheiten:

$$\left[\frac{C^{\cancel{2}}}{\cancel{\frac{As}{Vm}} \cdot J}\right] = \left[\frac{\cancel{C}}{\frac{1}{\frac{\cancel{J}}{\cancel{C}} \cdot m} \cdot \cancel{J}}\right] = [\,m\,] \quad \text{und} \quad \left[\frac{C}{\sqrt{\frac{As}{V\cancel{m}} \cdot kg \cdot \cancel{m}}}\right] = \left[\frac{C}{\sqrt{\frac{C}{\frac{J}{C}} \cdot kg}}\right] = \left[\frac{\cancel{C}}{\sqrt{\frac{\cancel{C^2}}{\cancel{kg} \cdot m^2/s^2} \cdot \cancel{kg}}}\right] = \left[\,\frac{m}{s}\,\right]$$

Eine Berechnung des Bahnradius ist auch durch Verwendung der **Quantisierung des Drehimpulses** möglich. Für den Drehimpuls des Elektrons gilt die Quanitisierung:

$$L_e = \underbrace{m_e \cdot \overbrace{\vec{r} \times \vec{v}}^{\perp \,\to\, r \cdot v}}_{klassisch} = \underbrace{n \cdot \hbar}_{quantisiert} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{n \cdot \hbar}{m_e \cdot r}$$

Dies in die Gleichung für die Kreisbewegung ($F_{zpt} = F_{Coulomb}$) eingesetzt und dann umgestellt auf r ergibt folgende Gleichung ($\hbar = \frac{h}{2 \cdot \pi}$):

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r_n = \frac{h^2 \cdot \epsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot q^2} \cdot n^2 = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js)^2 \cdot 8{,}8540 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}}{\pi \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C)^2} \cdot 2^2 = 212\,pm$$

Einheiten:

$$\left[\frac{J^2 \cdot s^2 \cdot \cancel{\frac{As}{Vm}}}{kg \cdot C^{\cancel{2}}}\right] = \left[\frac{J^{\cancel{2}} \cdot s^2 \cdot \frac{\cancel{C}}{\cancel{J} \cdot m}}{kg \cdot \cancel{C}}\right] = \left[\frac{\cancel{kg} \cdot \frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{s^2}} \cdot \cancel{s^2} \cdot \frac{1}{\cancel{m}}}{\cancel{kg}}\right] = [\,m\,]$$