



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Fachrichtung: LI02 – REALGYMNASIUM

LI03 – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK und PHYSIK

Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und beantworten Sie vier der acht Fragen!

PROBLEMSTELLUNG 1

Gegeben sei folgende Funktionenschar, wobei $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

- Untersuchen Sie Vorzeichen und Stetigkeit der Funktion f_a beim Variieren des Parameters a . Beweisen Sie, dass die Funktion f_a ein absolutes Maximum mit Abszisse 1 hat, egal welchen Wert $a \in \mathbb{R}$ annimmt.
- Wir bezeichnen mit f jene Funktion, die man aus f_a für $a = 2$ erhält. Überprüfen Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ ableitbar ist. Untersuchen Sie den Verlauf der Funktion f , indem Sie ihre Asymptoten und Wendepunkte bestimmen. Geben Sie außerdem die Größe des Schnittwinkels zwischen der Links- und der Rechts-Tangente im Punkt, in der die Funktion nicht differenzierbar ist, in Altgrad an. Bestimmen Sie die Werte der positiven Konstanten h und k , sodass unter Berücksichtigung der Funktion

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

Folgendes gilt: $g(3 - x) = f(x)$ für $x \geq 0$.

- Mit einem Teilchenbeschleuniger wird ein Strahl aus Protonen erzeugt, die eine kinetische Energie von 42 MeV besitzen. Um den Strahl auf ein bestimmtes Ziel zu lenken, wird ein homogenes und zur Flugbahn der Protonen senkrecht Magnetfeld benutzt, das eine Stärke von 0,24 T hat. Vernachlässigen Sie relativistische Effekte und beschreiben Sie die Bewegung eines Protons im Inneren des Magnetfeldes. Berechnen Sie den Krümmungsradius der Flugbahn.
- Sobald der Protonenstrahl das Magnetfeld \vec{B} verlässt, trifft er auf Wasser. Bezeichnen Sie mit $\mathcal{E}(x)$ die Energie des Protons, ausgedrückt in Megaelektronenvolt (MeV), die es noch hat, nachdem es x Zentimeter (cm) im Wasser zurückgelegt hat und sei $d\mathcal{E}$ die auf der Strecke dx vom Proton an das Wasser abgegebene Energie. Wir nehmen an, dass die Funktion $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ mit der Funktion $y = g(x)$ angenähert werden kann, wobei $h = 9/2$ und $k = 1$. Berechnen Sie die vom Wasser aufgenommene Energie \mathcal{E} , wenn das Proton die ersten 3 Zentimeter im Wasser zurücklegt.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMSTELLUNG 2

Zwei Punktladungen $Q_1 = q$ (q ist positiv) und $Q_2 = -q$ befinden sich respektive in den Punkten A und B , die einen Abstand $2k$ voneinander haben. Die Ladungen sind in Coulomb (C) und die Strecken in Meter (m) ausgedrückt. Man bezeichne mit r die Gerade, die durch die Punkte A und B verläuft.

- Bestimmen Sie in einem Punkt C auf der Geraden r die Stärke des elektrischen Feldes, das von den beiden Ladungen Q_1 und Q_2 erzeugt wird, in Abhängigkeit von C auf r . Gibt es auf dieser Geraden Punkte, in denen das elektrische Feld null ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie, dass die Stärke des elektrischen Feldes, das von Q_1 und Q_2 erzeugt wird, in einem Punkt P auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB abnimmt, wenn P sich vom Mittelpunkt von AB entfernt. Wir bezeichnen mit x den Abstand von P zum Mittelpunkt von AB . Drücken Sie die elektrische Feldstärke in P in Abhängigkeit von x aus.
- Untersuchen Sie den Verlauf der Funktion

$$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{3/2}}$$

wobei h und k reelle positive Parameter sind, indem Sie im Detail ihre Symmetrien, Asymptoten, Extrema und Wendepunkte bestimmen.

- Unter den Funktionen des Typs

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, bestimmen Sie die Stammfunktionen von f .

Zeigen Sie, dass wenn $h = k^2$ die Funktion f eine Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariable auf dem Intervall $[0; +\infty)$ darstellt. Wie groß sind Erwartungswert und Median dieser Zufallsvariable?

FRAGEN

1. Seien a und b zwei reelle positive Zahlen, wobei $a \geq b$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x(x^a + x^b) = a$$

2. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei so definiert:

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

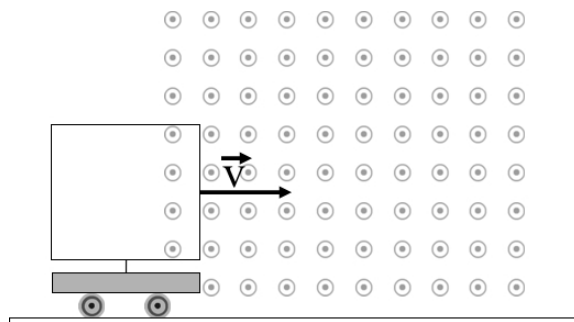
Untersuchen Sie das Vorzeichen der Funktion f und zeigen Sie, dass sie steigend ist. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx$$



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

3. Beweisen Sie, dass das Viereck, das die Mittelpunkte der Seiten eines Rhombus als Eckpunkte hat, ein Rechteck ist.
4. Es seien die Punkte $A(2; 3; 6)$, $B(6; 2; -3)$, $C(3; -6; 2)$ im dreidimensionalen Raum gegeben. Zeigen Sie, dass die Segmente OA , OB , OC (wobei der Punkt O den Ursprung der Achsen angibt) drei Kanten eines Würfels darstellen. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius der Kugel K , die dem Würfel umschrieben ist.
5. Eine Person wirft gleichzeitig zwei Würfel, deren Seitenflächen jeweils mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind und schreibt anschließend die größere der beiden gewürfelten Zahlen auf ein Blatt. Wenn dieser Vorgang sehr oft wiederholt wird, wie groß wird der zu erwartende Mittelwert der auf dem Blatt aufgeschriebenen Zahlen sein?
6. Wir betrachten ein reisendes Raumschiff, das sich relativ zur Erde mit einer Geschwindigkeit $v = 0,90 c$ bewegt. Wir nehmen an, dass im Raumschiff eine Schachtel mit den Dimensionen $a = 40$ cm, $b = 50$ cm und $h = 20$ cm sei, wobei die Seite b parallel zur Bewegungsrichtung des Raumschiffs sei. Wie groß ist das Volumen der Schachtel für einen Beobachter, der sich auf der Erde befindet? Wenn der Astronaut die Schachtel mit einer Geschwindigkeit $v_s = 0,50 c$ in dieselbe Richtung schmeißt, in die sich das Raumschiff bewegt, welche Geschwindigkeit misst der Beobachter auf der Erde?
7. Eine Spule, die aus N quadratischen Leiterschleifen mit Seite l besteht, hat einen elektrischen Widerstand R und ist auf einem Wägelchen befestigt, das sich mit vernachlässigbarer Reibung auf einer horizontalen Ebene bewegen kann. Das Wägelchen wird mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v} gezogen und tritt in eine Zone ein, in der ein Magnetfeld \vec{B} ist. Die Feldlinien zeigen aus dem Zeichenblatt heraus, wie in der Abbildung zu sehen ist. Erklären Sie, warum sich die Spule erwärmt und bestimmen Sie den Ausdruck für die Verlustleistung. Was passiert, wenn ein Wägelchen mit Geschwindigkeit \vec{v} in dieselbe Zone geschubst wird?

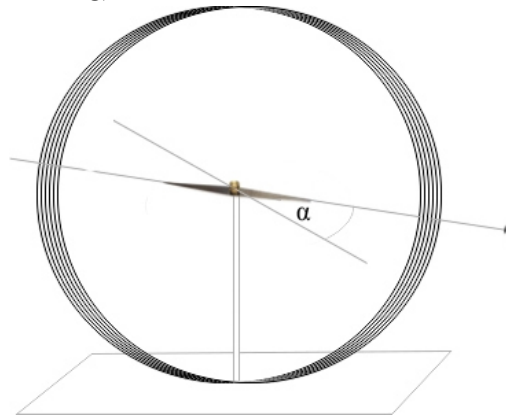




Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

8. Eine kompakte Spule besteht aus 130 Leiterschleifen mit Radius $R = 15$ cm.

Man legt eine magnetische Nadel, deren Dimensionen relativ zu R vernachlässigbar sind, in den Mittelpunkt der Spule (siehe Abbildung).



Die Ebene der Spule wird so ausgerichtet, dass sie die Nadel enthält, die ihrerseits nach der horizontalen Komponente des Erdmagnetfeldes ausgerichtet ist. Wenn durch die Spule Strom fließt, wird die Nadel um einen Winkel α abgelenkt. Erklären Sie die Ursache für diese Ablenkung.

In der Tabelle sind einige experimentelle Messwerte von α und der entsprechenden Stärke des Stromes in der Spule wiedergegeben. Verwenden Sie diese Daten, um die Stärke der horizontalen Komponente des Erdmagnetfeldes mit relativer Messunsicherheit zu bestimmen.

Ablenkung α	10°	20°	30°	40°	50°
Stromstärke	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

PHYSIKALISCHE KONSTANTEN		
Elementarladung	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
Masse des Protons	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A ²
Lichtgeschwindigkeit	c	$2,998 \cdot 10^8$ m/s
Elektronenvolt	eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$ J

Dauer der Arbeit: 6 Stunden

Die Benutzung von wissenschaftlichen und/oder grafischen Taschenrechnern ohne symbolische Rechenfunktion ist erlaubt (M.V. Nr. 205, Art. 17, Absatz 9).

Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.

Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.