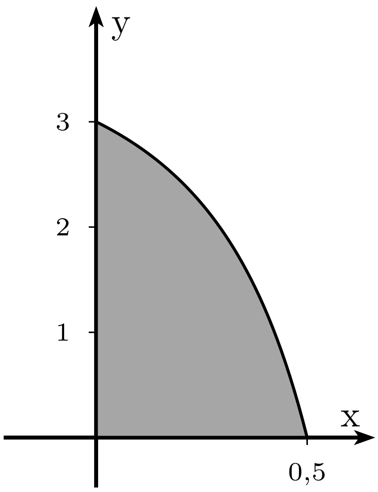
Lösung
Matura 2019-4

Problemstellung 1

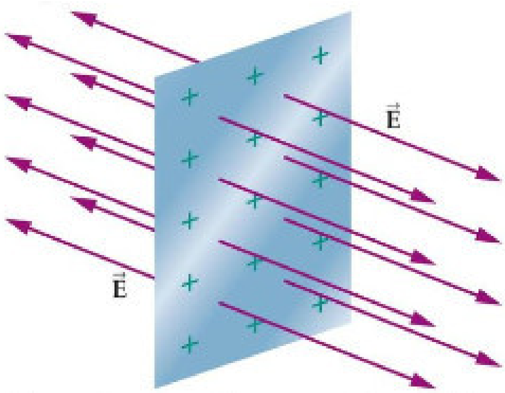
1. Die Funktion ist nur für nicht-negative x-Werte definiert.
   Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. Daher ist die waagrechte Asymptote $y = a$.
   Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} a - \dfrac{b}{[1-(1-\varepsilon)]^2} = -\infty$, da b positiv ist.
   Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} a + \dfrac{b}{[1-(1+\varepsilon)]^2} = +\infty$, da b positiv ist.
   Bei $x = 1$ liegt also eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor. Dort ist auch die vertikale Asymptote $x = 1$.
   Bedingung, dass es eine Stelle x_0 mit $0 \leq x_0 < 1$ gibt, für die $f(x_0) = 0$ gilt:
   $a - \dfrac{b}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$. Die negative Lösung erfüllt nicht $0 \leq x_0 < 1$.
   $x_0 = 1 - \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.
   Damit $0 \leq x_0 < 1$ ist, muss $b \leq a$ gelten.
   Die Tangentensteigung soll im Punkt $(0{,}5; 0)$ gleich -16 sein. Die Ableitungsfunktion ist $f'(x) = -\dfrac{2b}{(1-x)^3}$; $-16 = f'(0{,}5) = -16b \Rightarrow b = 1$
   Der Berührpunkt wird in die Funktionsgleichung eingesetzt: $a - \dfrac{1}{(1-0{,}5)^2} = a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$.
   Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung:
   $$f(x) = \begin{cases} 4 - \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 4 + \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

2. Zu bestimmen ist die Größe der eingeschlossenen Fläche:

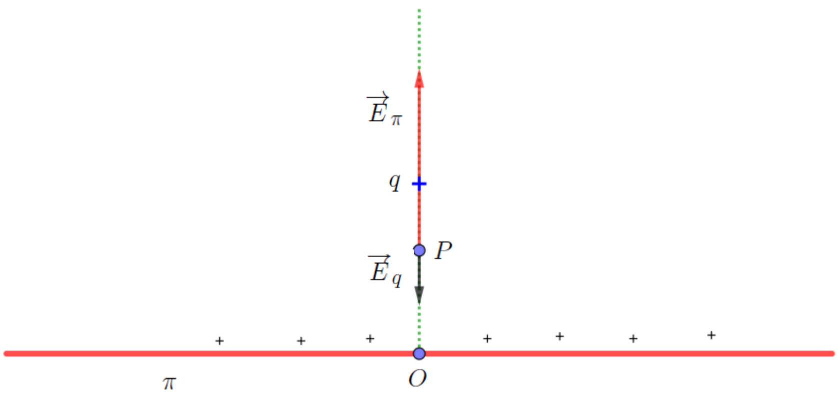


$$A = \int_0^{0{,}5} 4 - \frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{1}{1-x}\right]_0^{0{,}5} = 1$$

3. Das elektrische Feld, das von der Platte erzeugt wird, ist aus Symmetriegründen homogen und hat nach dem Gaußschen Satz die Feldstärke $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



Die Feldstärkevektoren stehen senkrecht zur Leiteroberfläche.
Die elektrische Feldstärke der Punktladung in einer Entfernung r von ihr ist hingegen $E_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$.
Die Halbgerade s wird von der Ebene ausgehend zum Punkt hin orientiert. x wächst mit zunehmendem Abstand zur Ebene.
Da sich die Ladung bei 1 befindet (die Einheit wird weggelassen), können wir für $0 \leq x < 1$ folgendes Feldstärkebild zeichnen, wobei der Abstand der Ladung q von der Platte gleich x ist.:



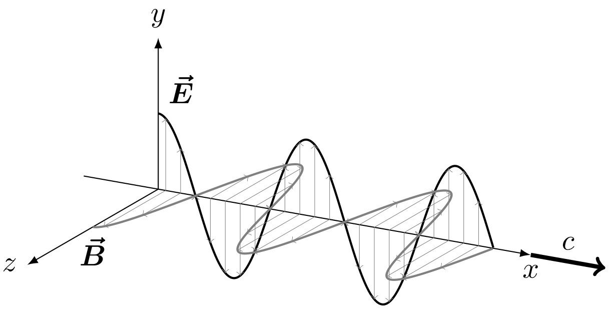
Die beiden Feldstärkevektoren zeigen hier in entgegengesetzte Richtung, da beide Ladungen positiv sind. Die Richtung der resultierenden Feldstärke wird durch die größere Feldstärke festgelegt.
Für den Betrag der resultierenden Feldstärke gilt: $|E_{res}| = |E_\pi - E_q| = \left| \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(1-x)^2} \right|$
Für $x > 1$ zeigen beide Feldstärkevektoren von der Platte weg und es gilt:
$|E_{res}| = |E_\pi + E_q| = \left| \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(1-x)^2} \right|$
Durch Vergleich mit der mathematischen Definition der Funktion erhält man
$a = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ und $b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q$
a hat die Einheit einer elektrischen Feldstärke, also N/C oder V/m.
Für die Einheit von b kann man das Coulomb-Gesetz umstellen: $b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q = E \cdot r^2$. Daher hat b die Einheit Nm^2/C oder Vm.

4. Für $x > 1$ können sich die Teilfelder nicht aufheben, da sie in die gleiche Richtung zeigen. Außerdem ist keines dieser Felder jemals 0. Daher gibt es für $x > 1$ keine Gleichgewichtslage.

Bereits im mathematischen Teil wurde gezeigt, dass bei $x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ eine Nullstelle ist. Allerdings muss $a \geq b$ sein, also $2\pi\sigma \geq q$
Dann gilt $x_0 = 1 - \sqrt{\frac{q}{2\pi\sigma}}$. Dort heben sich die beiden Feldstärken auf.
Die Feldstärke der Platte ist unabhängig von der Entfernung der Probeladung zur Platte gleich $\frac{\sigma}{2\varepsilon}$! Nun werden zwei Fälle unterschieden:
Falls die Probeladung Q an dieser Stelle positiv ist und wir sie zur Platte hin verschieben, dann sinkt die Feldstärke der felderzeugenden Ladung q und es überwiegt die Feldstärke der Platte, welche die Probeladung zurückschiebt. Verschieben wir die Probeladung von der Platte weg Richtung q, dann wächst die Feldstärke der felderzeugenden Ladung q und die Ladung wird zur Platte zurückgedrückt. Somit ist das Gleichgewicht stabil.
Falls die Probeladung Q negativ ist und wir sie zur Platte verschieben, sinkt die Feldstärke der felderzeugenden Ladung, aber die Richtung der Kraft durch die Plattenfeldstärke ist in diesem Fall zur Platte hin gerichtet, daher entfernt sich Q von der Gleichgewichtslage. Ebenso geschieht dies, wenn wir die Probeladung Richtung q verschieben, da die Probeladung negativ ist. Das Gleichgewicht ist labil, da eine kleine Störung dazu führt, dass sich die Ladung von der Gleichgewichtslage entfernt.

Problemstellung 2

1. Erklärung z.B.: `https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik/artikel/elektromagnetische-wellen`
   Ein Dipol (z. B. langer gerader Draht), in dem die Richtung des Stromflusses periodisch geändert wird, kann Ausgangspunkt für elektromagnetische Wellen sein. Bei der Änderung der Stromrichtung werden die Ladungsträger im Leitungsdraht beschleunigt. Modellhaft lässt sich die Entstehung der elektromagnetischen Welle auf folgende Weise verstehen: Im Dipol fließt ein periodisch wechselnder Strom. Wenn die Stromstärke am größten ist, dann baut sich um den Dipol ein kreisförmiges Magnetfeld auf, dessen Orientierung von der Stromrichtung vorgegeben wird. Während einer vollständigen Schwingung kommt der Stromfluss zwei Mal vollständig zum Erliegen. Dann sind die Ladungsträger an den Enden des Dipols konzentriert. Von dem positiven Dipolende gehen elektrische Feldlinien aus, die zum negativ geladenen Dipolende verlaufen.
   Nach Umpolung entladen sich die Dipolenden und das elektrische Feld wird schwächer, während sich gleichzeitig wieder ein Magnetfeld um den Leitungsdraht aufbaut. Bei diesem Prozess wechseln sich also ständig der Auf- und Abbau elektrischer und magnetischer Felder miteinander ab. Es entsteht ein periodisches elektromagnetisches Wechselfeld. Dieses Feld ist in der Lage, sich von der Oberfläche des Dipols zu lösen. Nach seiner Freisetzung breitet es sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum hindurch aus.
   Bei der Ausbreitung der elektromagnetischen Welle induziert das sich ändernde Magnetfeld ein elektrisches Feld, das sich ebenfalls ändert. Dies erzeugt seinerseits ein magnetisches Feld. Die Maxwellschen Gleichungen liefern die entsprechenden Formeln.
   Die Ausbreitungsrichtung ist senkrecht zu den beiden Feldstärkevektoren.

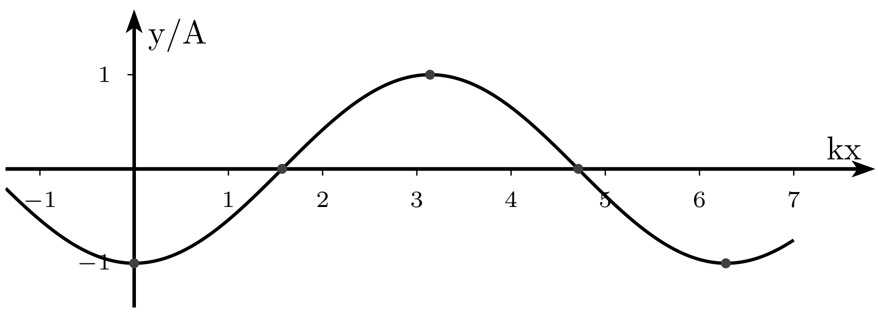


   E_0 ist der Scheitelwert der elektrischen Feldstärke, also der Maximalwert.
   k ist die Kreiswellenzahl, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$
   ω ist die Kreisfrequenz, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

2. $$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{y}$$

   Dabei ist $\hat{y}$ der Einheitsvektor in y-Richtung, $\omega = 2\pi f \Rightarrow$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{\omega}{c}$
   $\vec{E}(x,t) = 2V/m \sin\left(1{,}05 \cdot 10^{-2} \cdot \dfrac{x}{m} - 3{,}14 \cdot 10^{6} \cdot \dfrac{t}{s}\right)\,\hat{y}$
   E schwingt in der x-z-Ebene.
   Für die magnetische Feldstärke gilt: $B_0 = \dfrac{E_0}{c} = 6{,}67 \cdot 10^{-9}T = 6{,}67nT$.
   $\vec{B}(x,t) = 6{,}67nT \sin\left(1{,}05 \cdot 10^{-2} \cdot \dfrac{x}{m} - 3{,}14 \cdot 10^{6} \cdot \dfrac{t}{s}\right)\,\hat{z}$
   B schwingt in der x-y-Ebene, $\hat{z}$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung.

3. Die Daten enthalten keine Einheiten mehr. k und ω hängen nicht mehr zusammen!
Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = A\sin(kx - 10^6 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-7}) = A\sin(kx - \pi/2)$.
Daher ist die Sinusfunktion um $\pi/(2k)$ in x-Richtung nach rechts verschoben. Periode der Funktion: Die Zeit wird fixiert, x bleibt als Variable im Term. Die Sinusfunktion wiederholt sich nach 2π, also gilt $2\pi = kx \Rightarrow x = \frac{2\pi}{k}$.
Wertebereich: Der Sinusterm oszilliert zwischen -1 und 1. Daher ist der Wertebereich der Funktion $[-A; A]$.
Wegen der Verschiebung der Sinusfunktion um $\pi/(2k)$ in x-Richtung nach rechts liegen die Hochpunkte bei $x = \frac{1}{k}(\pi + n \cdot 2\pi) = \frac{(2n+1)\pi}{k}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, der y-Wert ist jeweils $y = A$.
Die Tiefpunkte liegen bei $x = \frac{2n\pi}{k}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, der y-Wert ist jeweils $y = -A$.
Wendepunkte: Die Wendepunkte liegen in der Mitte zwischen den Extrempunkten, also bei $x = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right) = \frac{(2n+1)\pi}{2k}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $y = 0$
Damit die primitive Periode p gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, muss $k = \frac{2\pi}{p} = 4$ sein, da die Periode $p = \frac{2\pi}{k}$ ist.



4. Vor dem Quadrieren können wir die Funktion umformen:
$f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = -2\cos(4x)$. Dabei wurde verwendet, dass der Sinus eine ungerade Funktion ist ($\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$) und dass $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ gilt.
Damit erhält man $g(x) = 4\cos^2(4x)$. Die Periode dieser Funktion ist $\frac{\pi}{4}$. Dies kann man mit der Formel für den doppelten Winkel zeigen: $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)+1}{2}$
$g(x) = 4\cos^2(4x) = 2\cos(8x) + 2 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$
Die Wendepunkte der Funktion $f(x)$ haben den Ordinatenwert $y = 0$. Beim Quadrieren liefert dies den kleinstmöglichen Wert, also liegen an den Wendestellen der Funktion $f(x)$ die Tiefpunkte der Funktion $g(x) = [f(x)]^2$ und auch die Nullstellen.
Durch das Umschreiben wird die Integration einfacher (ansonsten muss zwei Mal partiell integriert und der gesuchte Ausdruck auf die andere Seite gebracht werden).
$A = \int\limits_0^{\pi/4} 2\cos(8x) + 2\mathrm{d}x = 2x + \frac{1}{4}\sin(8x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$
Bemerkung: Die Fragestellung ist nicht klar formuliert. Es könnte auch die Periode von $f(x)$ verwendet werden.

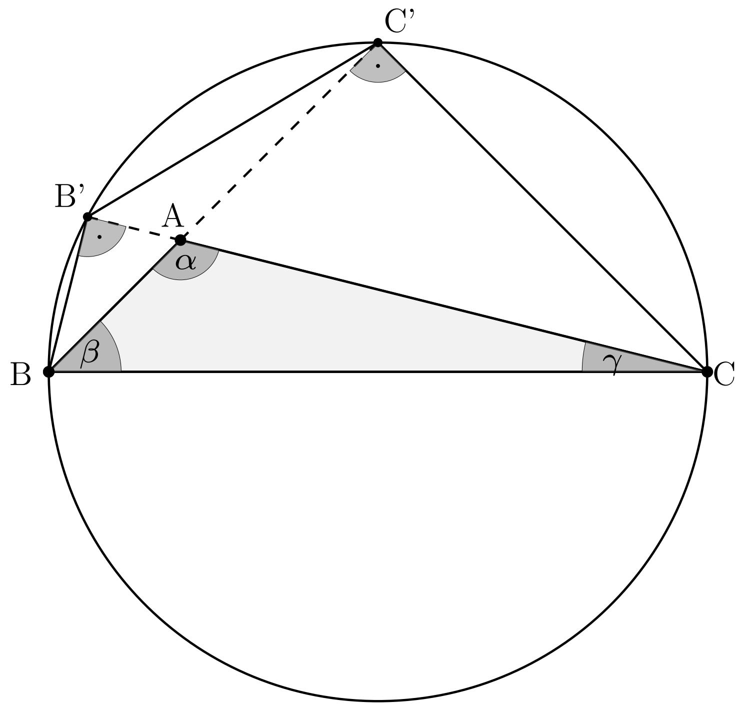
Frage 1

Der Nennergrad ist 3. Damit der Grenzwert gleich 3 wird, muss der Zählergrad auch 3 sein. Daher gilt: $ax^b + 8x^4 = 0; a = -8; b = 4$.
Aus Zähler und Nenner wird x^3 herausgehoben; Damit der Grenzwert gleich 3 ist, muss $\frac{c}{3} = 3$ sein, also ist $c = 9$
$a = -8; b = 4; c = 9$

Frage 2

Nach dem Hauptsatz der Integral-Differentialrechnung folgt $f'(x) = 3^{5x-2x^2} - 1$
Die Extrema liegen bei den x-Werten, die $f'(x) = 3^{5x-2x^2} - 1 = 0$ erfüllen.
$3^{5x-2x^2} = 1 \Rightarrow 5x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x(5 - 2x) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = 2{,}5$
Die zweite Ableitung ist $f''(x) = (5 - 4x) \cdot \ln(3) \cdot 3^{5x-2x^2}$
$f''(0) = 5\ln(3) > 0$. Bei $x = 0$ liegt ein relatives Minimum vor.
$f''(2{,}5) = -5\ln(3) > 0$. Bei $x = 2{,}5$ liegt ein relatives Maximum vor.

Frage 3



An den Fußpunkten C' und B' sind rechte Winkel. Da diese Punkte über der Seite BC sind, liegen sie auf dem Umkreis mit dem Durchmesser BC (Satz von Thales). Alle vier Punkte des Vierecks $BB'C'C$ liegen somit auf diesem Umkreis, was zu zeigen war.

Zu zeigen ist weiters, dass die Dreiecke ΔABC und $\Delta AB'C'$ ähnlich sind. Dazu müssen wir zeigen, dass sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
Die Scheitelwinkel in A sind gleich. Außerdem sind die Winkel nach dem Umfangswinkelsatz über der Sehne CC' gleich groß, also $\sphericalangle C'B'A = \sphericalangle ABC$. Damit ist die Ähnlichkeit bewiesen.

Frage 4

Ein Richtungsvektor der Geraden ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Man kann die Koeffizienten einer Ebene ablesen, die senkrecht zu diesem Vektor und somit zur Geraden ist:
$-4x - 2y + z + D = 0$. Der Punkt P der Ebene wird eingesetzt, um D zu berechnen:
$-4 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -2$
Die Ebenengleichung in Koordinatenform lautet: $-4x - 2y + z - 2 = 0$
Der Mittelpunkt M der Strecke PQ liegt auf der Geraden und auf der senkrechten Ebene, ist also der Schnittpunkt von beiden.
$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Dies liefert die drei Gleichungen $x = 1 - 4\lambda; y = -2\lambda, z = -1 + \lambda$
Eingesetzt in die Ebene erhält man: $-4(1 - 4\lambda) - 2(-2\lambda) + (-1 + \lambda) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$
Das Resultat wird in die drei Gleichungen eingesetzt, der Mittelpunkt ist $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$
Für die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke PQ gilt:
$M\left(\frac{x_P + x_Q}{2}; \frac{y_P + y_Q}{2}; \frac{z_P + z_Q}{2}\right) \Rightarrow$
$x_Q = 2x_M - x_P = \frac{1}{3}; \qquad y_Q = 2y_M - y_P = -\frac{13}{3}; \qquad z_Q = 2z_M - z_P = -\frac{16}{3}$

Frage 5

$P_1(gg)$ sei die Wahrscheinlichkeit, aus der ersten Schachtel 2 gelbe Kugeln zu ziehen, $P_2(gg)$ die Wahrscheinlichkeit, nach 2 gelben Kugeln aus der ersten Schachtel auch 2 gelbe Kugeln aus der zweiten Schachtel zu ziehen.
Dementsprechend sind die Wahrscheinlichkeiten $P_1(gb), P_2(gb), P_1(bb)$ und $P_2(bb)$ definiert.
Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist $P = P_1(gg) \cdot P_2(gg) + P_1(bg) \cdot P_2(bg) + P_1(bb) \cdot P_2(bb)$
$P = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{3 \cdot 4}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{3 \cdot 5}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{87}{196} \approx 0{,}444 = 44{,}4\%$
In den Formeln wird berücksichtigt, dass durch die Ziehung aus der ersten Schachtel die dementsprechende Kugelanzahl in der zweiten Schachtel geändert wird.

Frage 6

Im Umkehrpunkt hat das $\alpha-$Teilchen die Geschwindigkeit 0, mit der gesamten kinetischen Energie wurde Arbeit verrichtet.
Es gilt $|\Delta E_{kin}| = W = F \cdot s = E \cdot Q \cdot s$, wobei E die Feldstärke ist, Q die Ladung und s der

zurückgelegte Weg.
Die elektrische Feldstärke zwischen den Platten eines Kondensators ist $E = \frac{U}{d} = \frac{200V}{0{,}1m} = 2000V/m$.
$\frac{1}{2}mv^2 = EQs \Rightarrow s = \frac{m_\alpha v_0^2}{2QE} = \frac{4 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}kg \cdot (6{,}93 \cdot 10^4 m/s)^2}{4 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}C \cdot 2000V/m} = 0{,}0250m = 2{,}50cm$
Der Einfluss der Gravitation wird vernachlässigt, da die elektrische Kraft sehr viel größer ist als die Gewichtskraft.

Frage 7

Der Strom fließt in den seitlichen Leiterteilen senkrecht zum Magnetfeld, ein Strom fließt hinauf, einer hinunter. Die Ströme in den waagrechten Leitern sind parallel bzw. antiparallel zum magnetischen Feld.
Die Lorentzkraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld ist $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$, wobei $\vec{\ell}$ in Stromrichtung zeigt und als Betrag die Länge des Leiters im Magnetfeld hat.
Daher ist die Kraft auf die Ströme oben und unten 0 (Vektorprodukt!).
Die Kräfte auf den linken und rechten Leiterteil bilden einen Drehzwilling, also zwei antiparallele, gleich starke Kräfte, die sowohl zum Magnetfeld als auch zum Strom (siehe Vektorprodukt!) senkrecht sind. Sie rufen ein Drehmoment hervor, welches die Leiterschleife dreht. Diese Kräfte werden durch die Federkraftmesser ausgeglichen.
Der Betrag der Kraft auf einen Leiterteil ist $F = I\ell B = 0{,}50\,A \cdot 0{,}2\,m \cdot 0{,}10\,T = 0{,}01\,\mathrm{N}$.
Aus der Federkonstanten $D = \frac{F}{\Delta\ell}$ lässt sich die Längenänderung berechnen:
$\Delta\ell = \frac{F}{D} = \frac{0{,}01\,N}{2\,N/m} = 0{,}005\,m = 5mm$

Frage 8

Einheiten:
Der Exponent von e ist dimensionslos. x hat die Einheit m, also hat B die Einheit m^{-1}.
$A \cdot x^2$ hat die Einheit V, daher hat A die Einheit $\frac{V}{m^2}$.
Es gilt $E(x) = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = A(Bx^2 - 2x)e^{-Bx}$
Gesucht ist das Maximum des Betrages der elektrischen Feldstärke. Dazu wird E zuerst abgeleitet:
$E' = -Ae^{-Bx}(B^2x^2 - 4Bx + 2)$
Ist dieser Ausdruck 0, dann liegen Extrema vor: $x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{B}; x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{B}$
Durch die Betragbildung kann ein Minimum, das einen negativen Funktionswert hat, zu einem Maximum werden.
$E(x_1) \approx -0{,}46\frac{A}{B}; |E(x_1)| \approx 0{,}46\frac{A}{B}$
$E(x_2) \approx 0{,}16\frac{A}{B}$.
An diesen Stellen befinden sich relative Maxima.
Von diesen beiden Feldstärken ist jene bei $x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{B}$ die betragmäßig größere, nämlich $|E(x_1)| \approx 0{,}46\frac{A}{B}$.
Allerdings ist $\lim\limits_{x\to-\infty} E(x) = +\infty$, also sind die beiden relativen Maxima keine absoluten Maxima.