UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23. November 2016

- *Die Arbeit besteht aus 20 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** *und* **(E)** *gekennzeichnet. Genau eine dieser Antworten ist richtig, die anderen 4 sind falsch.*
- *Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.*
- *Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. Die Benutzung eines Taschenrechners oder eines Kommunikationsmittels ist verboten.*
- ***Für die gesamte Arbeit stehen dir 110 min zur Verfügung.*** *Gute Arbeit und gute Unterhaltung.*

Vorname: ______________________ Nachname: ______________________ Klasse: ________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Eine Mannschaft aus 16 Personen beteiligt sich an einem sportlichen Wettbewerb. Ein Spiel dauert 90 Minuten. Das Reglement sieht vor, dass im Spielfeld immer 11 Spieler pro Mannschaft anwesend sind und dass jeder der 16 Mannschaftsmitglieder im Laufe eines Spieles gleich viele Minuten lang spielt. Wie viele Minuten verbringt jeder Spieler im Laufe eines Spieles auf dem Feld?

   (**A**) weniger als 57 (**B**) zwischen 57 und 60 (**C**) zwischen 60 und 63 (**D**) zwischen 63 und 66 (**E**) mehr als 66

2) Vier Freunde haben ihre eigenen Schlüsselbunde satt und entscheiden, diese untereinander so auszutauschen, dass jeder von ihnen nicht wieder den eigenen erhält. Auf wie viele verschiedene Arten können sie die Schlüsselbunde austauschen?

   (**A**) 9 (**B**) 11 (**C**) 7 (**D**) 10 (**E**) 8

3) Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist 600000. Wie groß kann ihr größter gemeinsamer Teiler maximal sein?

   (**A**) 100 (**B**) 3000 (**C**) 1 (**D**) 200 (**E**) 600

4) Alberto, Barbara, Carlo und Daria beteiligen sich an einem Spiel. Am Anfang wird jedem durch eine Auslosung eine Zahl zugewiesen: Alberto erhält die Nummer $2^{101} + 2^{121} + 2^{180}$, Barbara $2^{100} + 2^{202} + 2^{400}$, Carlo $2^{101} + 2^{109}$ und Daria $2^{100} + 2^{108}$. Dann spielen sie mehrere Runden: In jeder Runde halbiert ein Spieler seine Zahl (wenn sie gerade ist) oder er scheidet aus (wenn sie ungerade ist). Es gewinnt, wer als letzter ausscheidet (es kann sein, dass mehrere Spieler ex aequo gewinnen). Wer wird gewinnen?

   (**A**) nur Alberto (**B**) Alberto und Carlo (**C**) nur Barbara (**D**) Carlo und Daria (**E**) Barbara und Daria

5) Sechs Personen (zwei mit rotem, zwei mit blauem und zwei mit gelbem Trikot) spielen Karten. Sie möchten sich auf drei Mannschaften zu je zwei Personen aufteilen. Auf wie viele verschiedene Arten können sie die Mannschaften bilden, wenn die zwei Mitglieder einer Mannschaft jeweils verschiedene Trikotfarben haben sollen?

   (**A**) 24 (**B**) 8 (**C**) 11 (**D**) 4 (**E**) 15

6) Jedes Jahr findet der Mannschaftswettbewerb der Grammatik-Olympiade statt. Laut Regel muss jede Mannschaft so viele Mitglieder haben wie Mannschaften in dem jeweiligen Jahr teilnehmen. Man hat außerdem festgestellt, dass jedes Jahr die Anzahl der teilnehmenden Mannschaften genau um 1 zunimmt. Wenn man mit x die Anzahl aller teilnehmenden Personen im Jahr 2016 und mit y die Anzahl aller teilnehmenden Personen im Jahr 2000 bezeichnet, was kann man dann mit Sicherheit über den Wert von $x - y$ aussagen?

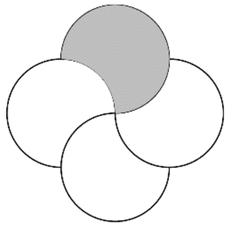
   (**A**) dass er durch 32 teilbar ist (**B**) dass er eine Quadratzahl ist (**C**) dass er eine Primzahl ist
   (**D**) dass er durch 101 teilbar ist (**E**) dass er ungerade ist

7) Vier Mannschaften (A, B, C, D) beteiligen sich an einem Fußballturnier. An jedem Spieltag hat jede Mannschaft ein Spiel und trifft im Laufe des Turniers genau einmal auf jede andere Mannschaft. Nach den ersten zwei Spieltagen hat die Mannschaft A 1 Tor kassiert und 3 geschossen, die Mannschaft B hat ohne Gegentor 4 Tore geschossen, die Mannschaft C hat ohne Gegentor 1 Tor geschossen und die Mannschaft D hat 7 Gegentore erhalten, ohne selbst eines zu schießen. Für jeden Sieg erhält man 3 Punkte, für Ausgleich einen Punkt und im Fall einer Niederlage keinen. Wie viele Punkte hat jede der Mannschaften A, B, C, D (in dieser Reihenfolge) in den ersten zwei Spieltagen erspielt.

   (**A**) 4,6,1,0 (**B**) 4,4,2,0 (**C**) 4,3,2,1 (**D**) 1,6,4,0 (**E**) 3,4,4,0

8) Ein Motorradfahrer und ein Fahrradfahrer bewegen sich entlang einer Fahrbahn in Form eines Quadrates mit Seitenlänge 90 km. Sie starten gleichzeitig von einer Ecke aus und bewegen sich im Uhrzeigersinn. Der Motorradfahrer fährt konstant mit 65 km/h und der Radfahrer mit 30 km/h. Nach wie vielen Stunden treffen sich die beiden erneut in einer der vier Ecken?

(**A**) 7 (**B**) 72/7 (**C**) 30/7 (**D**) 72 (**E**) niemals wieder



9) Diese Figur besteht aus 4 kongruenten Kreisbögen mit Radius 1. Wie groß ist die grau schattierte Fläche?

(**A**) $3 - \pi/4$ (**B**) $1 + \pi/2$ (**C**) $\pi - 1/2$ (**D**) $2 + \pi/4$ (**E**) $4 - \pi/2$

10) Romeo hat an jedem Sonntag (und an keinem anderen Tag) frei. Julia arbeitet auf einem Kreuzfahrtschiff. Sie bleibt 10 Tage auf See, hat dann 2 Tage frei, bevor sie für weitere 10 Tage in See sticht, usw. Heute ist Mittwoch, der 23. November 2016. Julia ist gerade an Land und wird morgen wieder arbeiten. Wie viele Tage können Romeo und Julia bis zum 23. November 2017 gemeinsam verbringen?

(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 7 (**E**) 5

11) Welches ist der größte Primfaktor der Zahl $3^{12} - 1$?

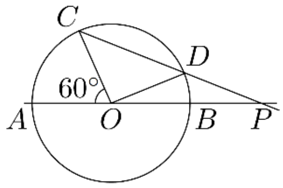
(**A**) 73 (**B**) $3^6 + 1$ (**C**) 107 (**D**) 13 (**E**) 949

12) Man wirft zwei rote und einen blauen Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen der roten Würfel gleich der Augenzahl des blauen Würfels ist?

(**A**) 1/12 (**B**) 2/27 (**C**) 1/15 (**D**) 1/18 (**E**) 5/72

13) Welche der folgenden Zahlen ist die kleinste?

(**A**) $\frac{\sqrt{2018}}{2017}$ (**B**) $\frac{\sqrt{2016}}{2015}$ (**C**) $\frac{\sqrt{2019}}{2018}$ (**D**) $\frac{\sqrt{2017}}{2016}$ (**E**) $\frac{\sqrt{2020}}{2019}$



14) Gegeben sei ein Kreis γ mit Zentrum O und Durchmesser $\overline{AB}$ = 12 cm. C ist ein Punkt auf diesem Kreis mit $A\hat{O}C$ = 60° und P ein Punkt auf der Verlängerung des Durchmessers AB auf der Seite von B und zwar so, dass $\overline{OD} = \overline{DP}$ ist (wobei D der Schnittpunkt von PC und γ zwischen den Punkten P und C ist). Wie groß ist der Winkel $A\hat{P}C$?

(**A**) 15° (**B**) $\frac{45°}{2}$ (**C**) 20° (**D**) 18° (**E**) 24°

15) Chiara hat bei der Betrachtung des Kalenders bemerkt, dass das aktuelle Jahr 2016 eine Eigenheit hat: Setzt man x = 2016, dann ist x+1 ein Vielfaches von 1, x+2 ein Vielfaches von 2, x+3 ein Vielfaches von 3, x+4 ein Vielfaches von 4, aber x+5 kein Vielfaches von 5. Wie viele andere positive ganze Zahlen kleiner als 2016 haben die gleiche Eigenheit?

(**A**) 141 (**B**) 83 (**C**) 167 (**D**) 134 (**E**) 149

16) Gegeben ist ein Dreieck EFG und dessen Umkreis C. Wir bezeichnen mit X den Schnittpunkt (verschieden von F) der Winkelhalbierenden des Winkels $E\hat{F}G$ mit dem Kreis C und mit Y den Mittelpunkt des Kreisbogens EG, der F enthält. Wie groß ist der Radius des Kreises, wenn man weiß, dass $\overline{FX}$ = 12 und $\overline{FY}$ = 5 ist?

(**A**) 9 (**B**) 13/2 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 11/2

17) Die Seitenlängen eines Dreiecks ABC sind $\overline{AC} = \overline{BC}$ = 10 cm und $\overline{AB}$ = 12 cm. Wie viele Zentimeter misst der Teil des Umfanges des Dreiecks ABC, der von all jenen Punkten gebildet wird, welche von A weniger weit entfernt sind als von C?

(**A**) 27/2 (**B**) 16 (**C**) 12 (**D**) 25/2 (**E**) 40/3

18) Ein Floh befindet sich anfänglich im Ursprung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems. Er kann sich nur auf Punkten mit ganzzahligen Koordinaten bewegen und von Mal zu Mal nach Belieben eines der folgenden Muster wählen:

- vom Punkt (x, y) hüpft er zum Punkt (x, y + 5)
- vom Punkt (x, y) hüpft er zum Punkt (x – 2, y – 3)
- vom Punkt (x, y) hüpft er zum Punkt (x + 4, y – 9)

Wie viele mögliche Wege gibt es, die den Floh vom Ursprung (0, 0) zum Punkt (0, 2016) bringen?

(**A**) keinen (**B**) genau einen (**C**) zwischen 5 und 20 (**D**) zwischen 20 und 100 (**E**) unendlich viele

19) Von einem konvexen Viereck ABCD sind die Seitenlängen AB, BC, CD und DA bekannt. Sie sind in dieser Reihenfolge 4, 9, 6 und 11 cm lang. E und F sind die Mittelpunkte der Seiten AB und CD. Wie groß ist die Fläche in cm² des Vierecks ABCD, wenn die Fläche des Vierecks BEDF 18 cm² beträgt?

(**A**) 27 (**B**) 36 (**C**) 24 (**D**) mehr als 50 (**E**) zwischen 40 und 50

20) Gegeben sind die ganzen Zahlen n und k, mit $1 \le k \le n$. Wir definieren ein Polynom mit Grad n – 1 auf folgende Weise: $p(x) = \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{(x+k)}$, z.B. für n = 5 und k = 2 ergibt sich p(x) = (x+1)(x+3)(x+4)(x+5). Nehmen wir an, dass für eine bestimmte Auswahl von n und k der Koeffizient von x^{n-2} des Polynoms gleich 67 ist. Wie groß ist in diesem Fall n?

(**A**) 68 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 11 (**E**) 69