Problem Nr. 1: NORD-KURVE

Sie sind der Verantwortliche für die Verwaltung des Sektors "Nord-Kurve" des Sportstadions Ihrer Stadt, und Sie müssen alle Dienstleistungen beim Einlass der Zuschauer und beim Verlassen des Stadions organisieren sowie für die Sicherheit und die Betreuung der Zuschauer sorgen. Die Form des Sektors unter Ihrer Führung ist ein Teil eines Kreisrings, wie in Abbildung 1 dargestellt.

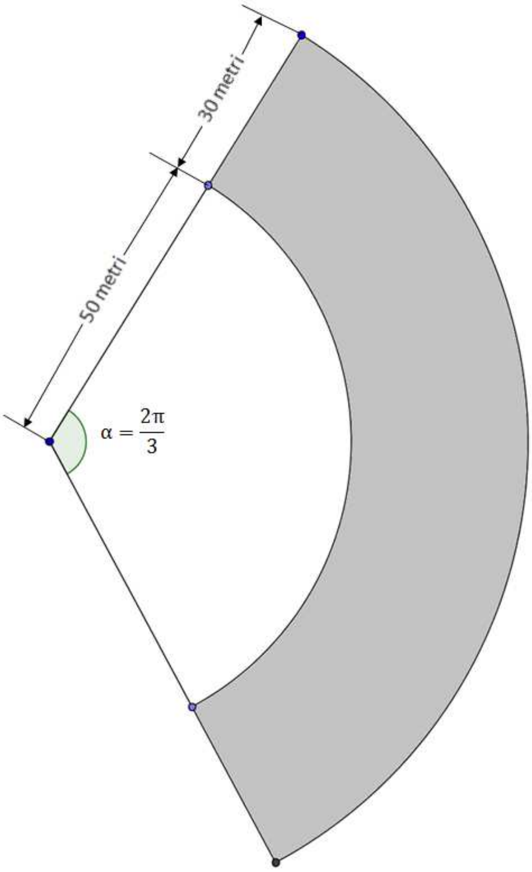

Abbildung 1

Die Sicherheitsbestimmungen sehen vor, dass maximal 3,25 Personen/m^2 zugelassen sind. Außerdem sind derzeit 9,5% der Fläche der "Nord-Kurve" wegen Instandhaltung unzugänglich und damit nicht nutzbar.

1) Bestimmen Sie die aktuelle, maximale Kapazität N_{max} des Sektors "Nord-Kurve", gerundet auf Hunderter.

Die Polizei schlägt vor, die Eintrittstore eine Stunde vor Beginn der Sportveranstaltung zu öffnen, um die Kosten zu begrenzen und auch aus Sicherheitsgründen um einen zu starken Zustrom zu verhindern. Die maximale Einlassgeschwindigkeit der Zuschauer darf nicht höher als 350 Eingänge pro Minute sein. Aufgrund der Beobachtungen der vergangenen Jahre weiß man, dass sich bei Öffnung der Eingänge eine Stunde vor Beginn der Veranstaltung der Verlauf der eingelassenen Zuschauerzahl wie die Kurve in Abbildung 2 verhält.

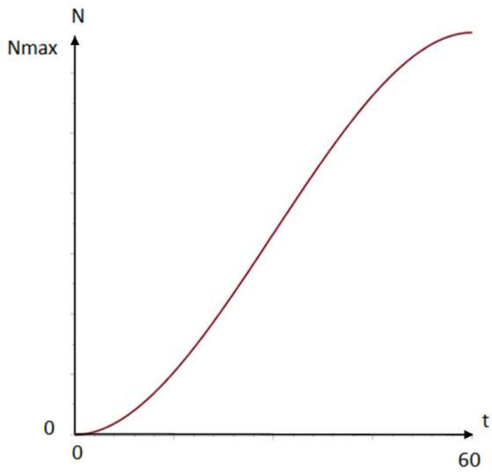

Abbildung 2

2) Bestimmen Sie das Polynom *p(t)* dritten Grades, das bei Angabe der Zeit *t* in Minuten diesen Verlauf am besten wiedergibt. Nehmen Sie hierbei an, dass die eingelassene Zuschaueranzahl bei Öffnung der Eingangstore ($t = 0$) gleich 0 ist und nach einer Stunde ($t = 60$) gleich dem maximal zulässigen Wert N_{max} ist. Die Einlassgeschwindigkeit ist zu Beginn bei Öffnung der Eingänge und nach einer Stunde jeweils gleich 0. Überprüfen Sie, ob die Funktion die Sicherheitsanforderung über die maximale Einlassgeschwindigkeit der Zuschauer im Stadion erfüllt.

Am Ende der Veranstaltung verlassen die Zuschauer das Stadion. Aus Erfahrung weiß man, dass jede Minute 5% der Zuschauer, die in der Minute vorher im Innern des Stadions waren, das Stadion verlassen.

3) Bestimmen Sie die Funktion, die dieses „Ausströmen" der Zuschauer am besten beschreibt. Mit $t = 0$ wird der Zeitpunkt der Öffnung der Tore bezeichnet und mit t_c (zu bestimmen) der Zeitpunkt, ab dem weniger als 100 Zuschauer im Stadion verbleiben. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, die die Anzahl der im Stadion anwesenden Zuschauer im Zeitraum $[0; t_c]$ darstellt. Nehmen Sie an, dass das Stadion bis zum maximalen Fassungsvermögen gefüllt ist und dass die Sportveranstaltung eine Stunde dauert. Bestimmen Sie zudem auch die maximale Geschwindigkeit des „Ausströmens" der Zuschauer aus dem Stadion.

Sie sollen auf der Grundlage der durchschnittlichen Anzahl der im Stadion anwesenden Zuschauer für diese auch den Restaurantdienst organisieren.

4) Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl der im Stadion anwesenden Zuschauer im Zeitraum von der Öffnung der Tore, $t = 0$, bis zum Zeitpunkt $t = t_c$.

Problem Nr. 2: DIE VASE

Die Firma, in der Sie arbeiten, produziert Gartenartikel und Sie sind beauftragt worden, das Modell einer Blumenvase zu überprüfen, das von einem Ihrer Kollegen entworfen wurde. Die Vase ist $h = 18$ cm hoch und besteht aus zwei Kegelstümpfen, die die größere Grundfläche gemeinsamen haben. Die Skizze, die Ihnen zur Verfügung gestellt wurde (Abbildung 1) stellt den Längsschnitt der Vase dar.

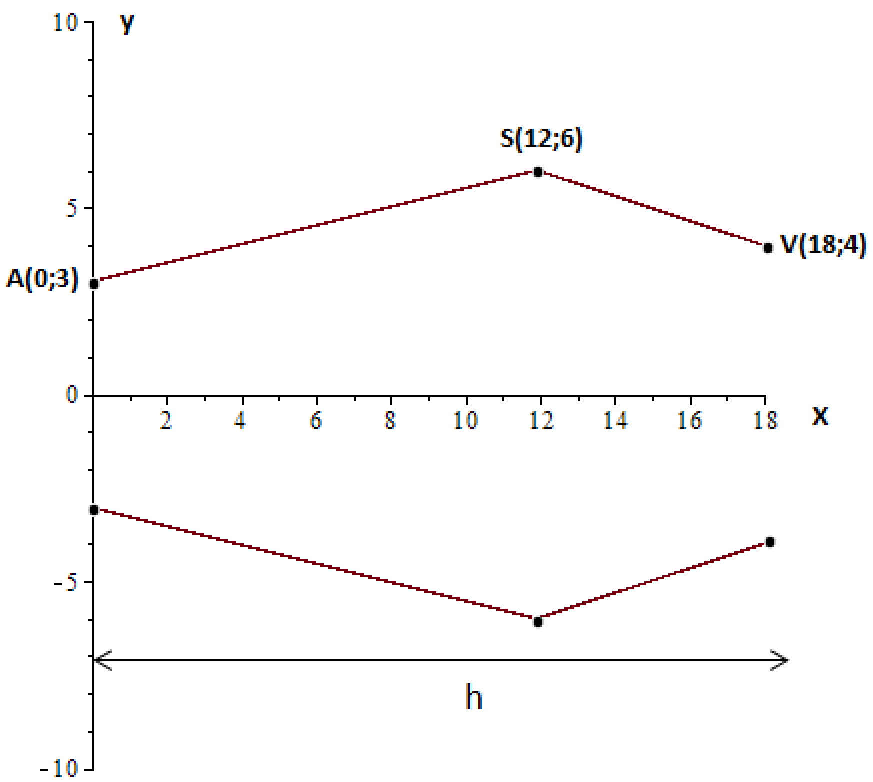

Abbildung 1

Im kartesischen Koordinatensystem, das in Abbildung 1 verwendet wird, entspricht die Einheit 1 cm. Der Leiter Ihrer Abteilung verlangt von Ihnen folgende Punkte.

1) Überprüfen Sie den Wertes des Volumens der Vase, die von Ihrem Kollegen entworfen wurde.

Wenn das Volumen kleiner als 1,5 Liter ist, muss die Höhe der Vase so vergrößert werden, damit das Volumen von 1,5 Litern erreicht wird. Dabei müssen die Maße der Durchmesser, die den Punkten A, S und V entsprechen, unverändert bleiben. Die Form soll überdies weniger „kantig“ werden. Um seinen Antrag besser zu erklären, gibt Ihnen der Betriebsleiter folgende Zeichnung (Abbildung 2).

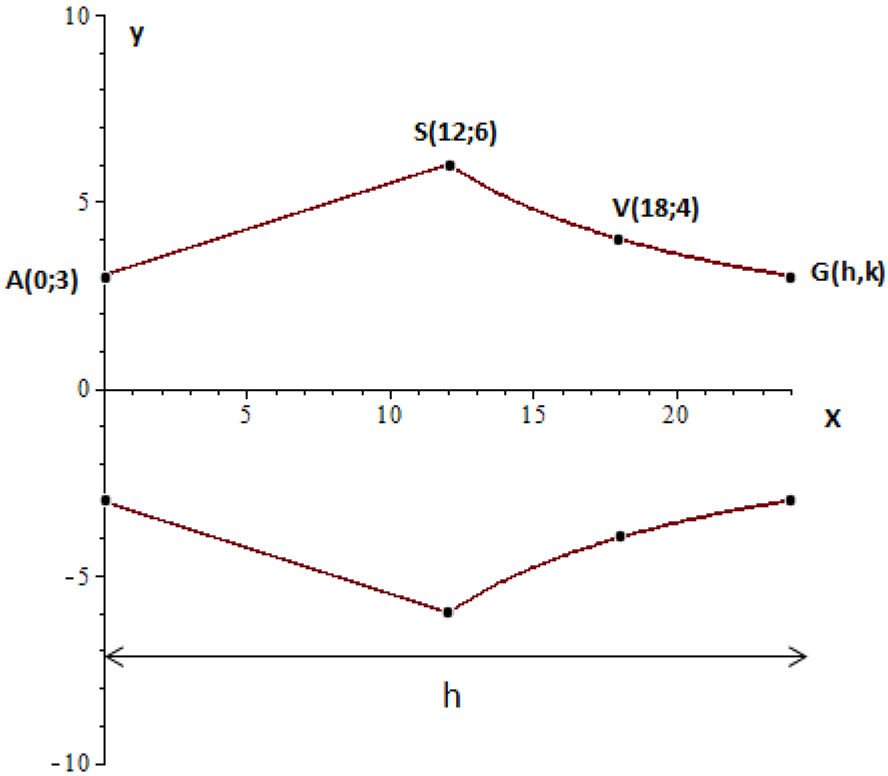

Abbildung 2

Die Kurve, die durch die Punkte S, V und G geht und vom Betriebsleiter gezeichnet ist, kann durch eine Hyperbel der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ angenähert werden.

2) Bestimmen Sie durch Aufrunden bis auf den Millimeter genau, die Koordinatenwerte von *h* und *k* des Punktes G, die es ermöglichen, den Auftrag zur Änderung der Form der Vase zu erfüllen.

Nachdem ein erstes Exemplar der Vase hergestellt wurde, weist der Produktionsleiter darauf hin, dass die übermäßige „Kantigkeit" des Profils der Vase an der Stelle S, die Produktion sehr teuer macht.

3) Betrachten Sie die Funktion, deren Graph in Abbildung 2 dargestellt ist, in der Halbebene $y \geq 0$ und beschreiben Sie die Eigenschaften der Funktion im Punkt S. Begründen Sie Ihre Behauptungen.

4) Ermitteln Sie die ganzrationale Funktion zweiten Grades, welche es ermöglicht, unter Beibehaltung der Maße der Durchmesser in den Punkten A und S, die Punkte A und S zu verbinden und dabei die scharfe Kante in S zu eliminieren. Zeichnen Sie die neue Form der Vase und ermitteln Sie jenen Punkt der Kurve AS, in dem die Steigung des Graphen im Vergleich zu der vorher vorgeschlagenen Form unverändert geblieben ist.

Abschnitt Fragen

FRAGE 1

Gegeben ist die Funktion

$$y = e^{x^3} - 8$$

1) Weisen Sie nach, dass die Funktion umkehrbar ist.

2) Stellen Sie fest, ob die inverse Funktion f^{-1} in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs ableitbar ist und begründen Sie die Antwort.

FRAGE 2

Die folgende Differentialgleichung 1. Ordnung ist gegeben

$$y' = \frac{1}{2x - 1}$$

bestimmen Sie die Lösung des Cauchy-Problems unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(1) = 0$

FRAGE 3

Von welcher der folgenden Differentialgleichungen ist die Funktion $y = ln(x - 3)$ eine Lösung?

a) $(x-3)\cdot y'' - (x-3)^2\cdot y' + 2 = 0$

b) $x\cdot y'' - (x-3)\cdot y' + x + 2 = 0$

c) $(x-3)^2\cdot y'' - (x-3)\cdot y' + 2 = 0$

d) $x^2\cdot y'' + y' + 3\cdot x - 9 = 0$

Begründen Sie die Antwort.

FRAGE 4

Überprüfen Sie, ob Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}$ konvergent ist und bestimmen Sie, falls sie konvergent ist, deren Summe.

FRAGE 5

Für den Entwurf einer Website ist es notwendig, eindeutige Zugangscodes zu generieren. Zu diesem Zweck sollen zwei Großbuchstaben des englischen Alphabets gefolgt von einer Reihe von Ziffern zwischen 0 und 9 verwendet werden. Alle Zugangscodes müssen die gleiche Anzahl an Zeichen haben und die Wiederholung von Buchstaben und Ziffern ist zulässig. Welche minimale Anzahl an Zeichen ist zu setzen, um mindestens 5 Millionen verschiedene Zugangscodes erzeugen zu können? Begründen Sie die Antwort.

FRAGE 6

Der Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 3 in der Ebene Oxy ist Grundfläche eines Körpers. Die Schnittflächen des Körpers senkrecht zur x-Achse sind Quadrate. Berechnen Sie das Volumen des Körpers.

FRAGE 7

Finden Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 2 in ihrem Koordinatenpunkt (1; 1; z) mit negativem z.

FRAGE 8

Lösen Sie das folgende unbestimmte Integral

$$\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx$$

und stellen Sie die Stammfunktion grafisch dar, die durch den Punkt $\left(\frac{2}{\pi}; 2\right)$ geht.

FRAGE 9

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}$$

FRAGE 10

In einem Bahnhof kommen zwischen 8:00 und 10:00 Uhr morgens im Durchschnitt alle 20 Minuten 2 Züge an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in 20 Minuten:

a) kein Zug ankommt

b) nur ein Zug ankommt

c) maximal 4 Züge ankommen.