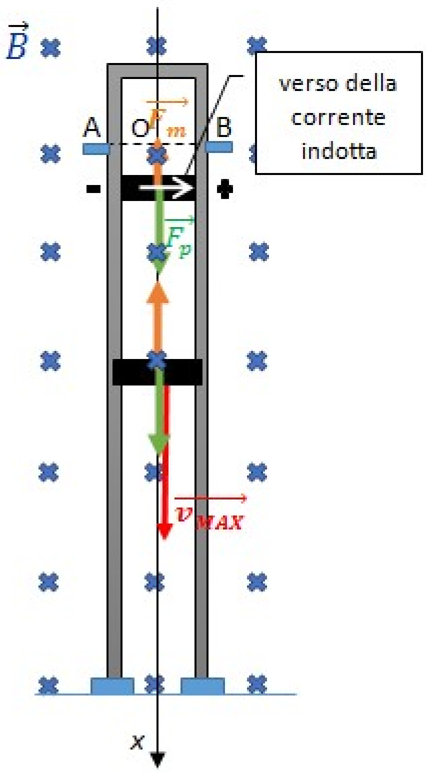
Problema n. 2: soluzione



Q1. La nuova situazione può essere rappresentata con la figura riportata sulla sinistra dove è stato scelto un verso entrante per il campo magnetico $\vec{B}$ applicato.

Eliminando i blocchi A e B la barretta inizia il suo moto di caduta sotto l'effetto della forza peso $\vec{F_p}$, nella direzione e nel verso dell'asse x introdotto in figura.

Con il movimento della barretta aumenta nel tempo l'area della regione delimitata dalla barretta e dalla parte della guida sopra di essa provocando una continua variazione del flusso del campo magnetico che attraversa la regione stessa.

In queste condizioni la barretta subisce il fenomeno dell'induzione elettromagnetica diventando sede di una f.e.m. indotta fem_i che, per la legge di Lenz, ha la polarità indicata in figura.

Per la legge di Faraday-Neumann:

$$fem_i = \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| = \left|-\frac{d}{dt}BS\right| = \frac{d}{dt}Blx(t) = Bl\frac{dx}{dt} = Blv(t)$$

Tale f.e.m. genera una corrente indotta i_i che scorre con verso antiorario lungo la spira metallica che costituisce il bordo della regione di area variabile ed ha intensità direttamente proporzionale alla velocità istantanea $v(t)$ della barretta. Infatti:

$$i_i = \frac{fem_i}{R} = \frac{Blv(t)}{R} \tag{1}$$

La barretta di lunghezza l, percorsa dalla corrente i_i ed immersa nel campo magnetico $\vec{B}$, risente allora anche della forza magnetica $\vec{F}_m$ descritta dalla legge $\vec{F}_m = i\vec{l} \times \vec{B}$ che, per la regola della mano destra, ha la stessa direzione della forza peso ma verso opposto. Il modulo di tale forza è dato dall'espressione:

$$F_m = ilBsen90° = \frac{Blv(t)}{R}lB = \frac{B^2l^2}{R}v(t) \tag{2}$$

F_m è quindi una forza che ostacola il moto della barretta ed ha una intensità proporzionale alla velocità istantanea $v(t)$: si comporta quindi come una forza di attrito viscoso.

Q2. Il grafico 1 corrisponde ad un moto uniformemente accelerato in quanto la pendenza della curva, che identifica l'accelerazione, si mantiene costante.

Il grafico 2 corrisponde ad un moto che presenta un'accelerazione crescente nel tempo.

Il grafico 3 descrive un moto che risulta accelerato, con accelerazione decrescente nel tempo fino ad annullarsi, facendo così proseguire il moto a velocità costante.

È proprio il grafico 3 quello che rappresenta l'andamento nel tempo della velocità della barretta infatti: col passare del tempo cresce la forza magnetica e diminuisce l'accelerazione finché la forza magnetica non arriva ad uguagliare in modulo la forza peso facendo così proseguire il moto a velocità costante (*I principio della dinamica*: $\vec{F}_{TOT} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = cost$).

Q3. La velocità massima si ottiene imponendo la condizione di equilibrio delle forze applicate:

$$F_m = F_p$$

Utilizzando il risultato dell'espressione (2):

$$\frac{B^2 l^2}{R} v_{MAX} = mg$$

$$v_{MAX} = \frac{mgR}{B^2 l^2} \tag{3}$$

Con i valori assegnati si trova:

$$v_{MAX} = \frac{30 \cdot 10^{-3}\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}00\Omega}{(2{,}5\mathrm{T})^2 \cdot (40 \cdot 10^{-2}\mathrm{m})^2} = 0{,}5886\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 59\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

Q4. L'equazione del moto si ottiene applicando la seconda legge della dinamica:

$$F_{TOT} = ma$$

$$F_p - F_m = m\frac{dv}{dt}$$

Sostituendo a F_m l'espressione trovata nella (2):

$$mg - \frac{B^2 l^2}{R} v(t) = mv'(t) \tag{4}$$

tenendo conto della (3) si arriva alla:

$$v'(t) + \frac{g}{v_{MAX}} v(t) = g \tag{5}$$

che rappresenta l'equazione cercata.

Derivando la funzione $\qquad v(t) = v_{MAX}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (6)$

si trova $\qquad v'(t) = \frac{v_{MAX}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Effettuando le sostituzioni nella (5) si verifica che la (6) è la soluzione dell'equazione del moto se $\tau = \frac{v_{MAX}}{g}$.

Nella funzione espressa dalla (6) si osserva che la velocità istantanea $v(t)$ è ricavabile dal prodotto tra la velocità massima v_{MAX} , analizzata al punto Q.3, ed il fattore $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ in cui e è il numero di Nepero, t rappresenta il tempo e τ è una grandezza avente le dimensioni di un tempo, anche detta "costante di tempo".

Rispetto al grafico corrispondente alla (6), che è poi il grafico 3 presente sul testo del problema al punto 2., si può verificare che τ rappresenta l'ascissa del punto in cui la retta tangente nell'origine incontra l'asintoto orizzontale $v = v_{MAX}$, e quindi il tempo che avrebbe impiegato la barretta a raggiungere la massima velocità se avesse mantenuto un'accelerazione costante pari a quella iniziale (g), cioè in assenza di campo magnetico.