PROGETTTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede – Gara Triennio

22 novembre 2011

1) *Die Arbeit besteht aus 25 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben A, B, C, D, E gekennzeichnet.*
2) *Nur eine dieser Antworten ist richtig, die anderen vier sind falsch. Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.*
3) *Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. DIE BENUTZUNG EINES TASCHENRECHNERS IST NICHT GESTATTET:*
4) *Für die gesamte Arbeit stehen dir **120 Minuten** zur Verfügung.*

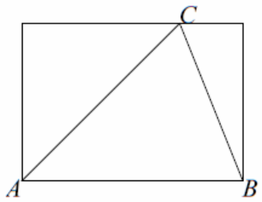
Gute Arbeit und viel Vergnügen!

Vorname:________________________Nachname___________________Klasse:____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Wie viele 6-stellige Zahlen können aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, gebildet werden, so dass die Zahlen durch 1, 2, 3, 4, 5 , 6 teilbar sind?
(A) keine, **(B)** 1, **(C)** 18, **(D)** 120, **(E)** 360.

2) Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck. Wir konstruieren ein Rechteck, bei dem eine Seite genau mit AB übereinstimmt. Der Punkt C ist auf der Rechteckseite, die AB gegenüberliegt. Wir wiederholen die Konstruktion, wobei wir von der Seite BC bzw. der Seite CA ausgehen und erhalten so drei Rechtecke. Diese drei Rechtecke haben sicher:



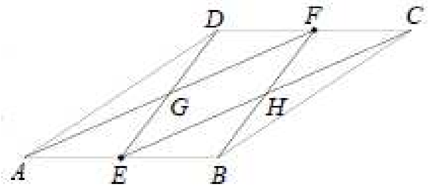
(A) gleichen Umfang, **(B)** gleiche Fläche, **(C)** gleiche Summe der Längen der Diagonalen , **(D)** gleiches Verhältnis zwischen großer und kleiner Seite, **(E)** keine der vorhergehenden Aussagen ist sicher wahr.

3) In jeder Ecke einer Pyramide mit achteckiger Basis ist eine der Zahlen 1, 2 oder 3 geschrieben, so dass auf jeder Seitenfläche (Basis eingeschlossen) die Summe ihrer „Eckzahlen" jeweils durch 3 teilbar ist. Wie groß ist die Summe aller „Eckzahlen", wenn wir wissen, dass nicht nur 3er als Zahlen vorkommen?
(A) 12, **(B)** 14, **(C)** 15, **(D)** 18, **(E)** 21.

4) *m* und *n* sind zwei positive ganze Zahlen mit $m - n = 7$. Wie viele Werte zwischen 0 und 2011 (Grenzen eingeschlossen) kann der Term $m + 5n$ annehmen?
(A) 6, **(B)** 334, **(C)** 670, **(D)** 1005, **(E)** 2012.

5) Bei dem Galadinner, das jedes Jahr während der Mathematik-Olympiade in Cesenatico stattfindet, gibt es verschiedene Vor- und Hauptspeisen. Im letzten Jahr gab es 60 Möglichkeiten zur Zusammenstellung eines Menüs (also einer Vor- und einer Hauptspeise). Heuer werden einige Vorspeisen mehr angeboten, so dass 68 verschiedene Menüs möglich sind. Wie viele Vorspeisen müssen im vorigen Jahr mindestens angeboten worden sein? [Bei einem Menü kann jede Vorspeise mit jeder Hauptspeise kombiniert werden.]
(A) 4, **(B)** 8, **(C)** 10, **(D)** 12, **(E)** 15.

6) Im Parallelogramm ABCD steht die Strecke BD senkrecht zu AB und E bzw. F sind die Mittelpunkte von AB bzw. CD (siehe Abbildung) . Bestimme die Fläche des Vierecks GEHF, wenn AB = 5 cm und BD = 2 cm.



(A) $\frac{15}{8}\,cm^2$, **(B)** $2\,cm^2$, **(C)** $\frac{9}{4}\,cm^2$, **(D)** $\frac{5}{2}\,cm^2$, **(E)** $3\,cm^2$.

7) Eine Zahl wird Palindrom genannt, wenn die Abfolge ihrer Ziffern unverändert bleibt, egal ob von links nach rechts oder von rechts nach links gelesen wird; z. B. ist 36563 ein Palindrom. Wie viele fünfstellige Palindrome gibt es, deren Summe ihrer Ziffern gerade ist?
(A) 450, **(B)** 550, **(C)** 700, **(D)** 900, **(E)** 1000.

8) Gabi schreibt eine Folge von 10 Zahlen auf (eventuell auch negative Zahlen), so dass jede Zahl der Folge ab dem dritten Folgenglied die Summe aus den zwei Vorgängern ist. Die erste Zahl der Folge ist 34, die letzte Zahl ist 0. Wie groß ist die Summe aller Folgenglieder?
(A) – 34, **(B)** 0, **(C)** 22, **(D)** 68, **(E)** 88.

9) Das arithmetische Mittel der Innenwinkel eines Polygons ist 175°. Wie viele Seiten hat das Polygon?
(A) 18, **(B)** 25, **(C)** 60, **(D)** 72, **(E)** 80.

10) *a, b* und *c* sind reelle Zahlen, die sich voneinander unterscheiden. Höchstens wie viele reelle Zahlen x erfüllen die Gleichungen $ax + b = bx + c = cx + a$?
(A) Keine, **(B)** 1, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** mindestens 5.

11) Ein Känguru und ein Frosch befinden sich anfänglich auf demselben Eckpunkt eines regelmäßigen 41-Ecks. Sie beginnen zu hüpfen. Der Frosch hüpft immer von einem Eckpunkt zum nächstliegenden Eckpunkt gegen den Uhrzeigersinn, das Känguru hüpft von seinem Eckpunkt zu jenem, auf dem sich der Frosch gerade befindet. Dabei halten sie eine bestimmte Reihenfolge ein: Der Frosch macht einen Sprung, das Känguru macht einen; der Frosch macht zwei Sprünge, das Känguru einen; der Frosch macht drei Sprünge, das Känguru einen usw. Wie oft ist das Känguru zum Ausgangspunkt zurückgekehrt, nachdem es 40 Sprünge gemacht hat?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

12) Wir legen fest, ein Paar *(a, b)* aus natürlichen Zahlen „*schön“* zu nennen, wenn für jedes beliebig gewählte Paar natürlicher Zahlen *(c, d),* für das $a \cdot b = c \cdot d$ ist, die Bedingung $a + b = c + d$ erfüllt wird. Wie viele „schöne“ Paare gibt es?
(A) Keines, **(B)** eines, **(C)** fünf, **(D)** sieben, **(E)** mehr als acht.

13) Marta hat eine gerade Zahl an die Tafel geschrieben. Zwölf Mal tauscht Marta die angeschriebene Zahl mit dem um 5 erhöhten Quadrat der Zahl aus. Mit welcher Ziffer kann die Zahl enden, die am Schluss von Martas Berechnungen an der Tafel steht?
(A) 0 oder 4, **(B)** 0, 4 oder 6, **(C)** 0 oder 6, **(D)** 4 oder 6, **(E)** die Zahl kann mit jeder geraden Ziffer enden.

14) In jedem Feld eines Schachbretts mit 8 Zeilen und 8 Spalten ist eine ganze Zahl eingetragen. Die Zeilen und Spalten des Schachbretts sind von 1 bis 8 nummeriert, das Feld in Zeile 1 und Spalte 1 ist schwarz. Die Summe der Zahlen in den weißen Feldern ergibt 28, die Summe der Zahlen in den ungeraden Spalten ergibt 47. Wenn alle Vorzeichen der Zahlen in den weißen Feldern vertauscht werden, dann beträgt die Summe der Zahlen in den ungeraden Zeilen
(A) -14, **(B)** 19, **(C)** 33, **(D)** 75, **(E)** die Daten reichen nicht aus um dies zu bestimmen.

15) Jeder der vier Freunde Anna, Erika, Lorenz und Josef lügt immer oder sagt immer die Wahrheit. Anna sagt: „ Erika lügt immer“; Erika sagt: „Josef sagt immer die Wahrheit“; Josef sagt: „Anna lügt immer“; Lorenz sagt: „Anna, Erika und Josef lügen immer“. Höchstens wie viele lügen immer?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** keine der vorhergehenden Antworten.

16) *ABC* ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\ cm$. *D* und *E* sind Punkte auf *AB* bzw. *AC*, beide 6 cm von *A* entfernt. *H* ist der Fußpunkt der Höhe von *ABC* auf *BC*. Berechne das Verhältnis der Flächen von *ABC* und *DHE*.
(A) $\frac{25}{9}$, **(B)** $\frac{25}{12}$, **(C)** $\frac{10}{6}$, **(D)** $\frac{25}{6}$, **(E)** $\frac{9}{4}$

17) Wenn man weiß, dass die Gleichung $ax^2 - bx + c = 0$ mit *a > 1* zwei positive Lösungen kleiner als 1 besitzt, dann kann man mit Sicherheit sagen:
(A) $c + b < 3a$, **(B)** $c \le b < a$, **(C)** $b \le c$, **(D)** $c \le b < 2$, **(E)** $b < 2\ und\ c < a$.

18) Gabriella hat einen großen weißen Spielwürfel mit 6 Flächen, nur die abgebildeten Zahlen sind schwarz. Sie will alle Seitenflächen und die Ecken des Würfels mit den Farben rot, blau, grün und gelb bemalen. Dabei sollen angrenzende Seitenflächen (jene mit einer gemeinsamen Kante) nie mit derselben Farbe bemalt werden; jede Ecke soll eine andere Farbe als alle Seitenflächen haben, der sie angehört. Auf wie vielen verschiedenen Arten kann sie das machen?
(A) 24, **(B)** 48, **(C)** 96, **(D)** 264, **(E)** 4^6.

19) Wie viele geordnete Tripel *(p, q, r)* aus Primzahlen, die kleiner als 100 sind, erfüllen die Gleichung $p^2 + q^2 = r$? [1 ist keine Primzahl.]
(A) 2, **(B)** 4, **(C)** 6, **(D)** 8, **(E)** 16.

20) Im Viereck *ABCD* stehen die Diagonalen senkrecht zueinander und die Winkel in *B* und *D* sind rechte Winkel. Außerdem gilt $\overline{AB} = \overline{AD} = 20\ cm$, $\overline{BC} = \overline{CD} = 30\ cm$. Bestimme den Radius des Inkreises von *ABCD*.
(A) 15 cm **(B)** $5\sqrt{13}$ cm, **(C)** 10 cm, **(D)** $6\sqrt{5}$ cm, **(E)** 12 cm.

21) An einem Turnier nehmen 20 Spieler teil. Bei jeder Runde werden zwei der Spieler, die noch im Rennen sind, ausgelost. Diese bestreiten einen Wettkampf. Jeder Spieler, der zwei Mal verloren hat, scheidet aus dem Turnier aus. Der letzte Spieler, der übrig bleibt, gewinnt das Turnier. Wir wissen, dass der Sieger nie verloren hat. Wie viele Wettkämpfe wurden dann insgesamt ausgetragen?
(A) 19, **(B)** 38, **(C)** 40, **(D)** 380, **(E)** es sind zu wenige Daten angegeben.

22) Auf einem Blatt ist ein Viereck ABCD gezeichnet. Das Blatt wird entlang einer Geraden gefaltet, so dass B auf dem Mittelpunkt von DC zu liegen kommt. Die Seite BC wird durch die Faltung in zwei Strecken a, b mit $a \le b$ geteilt. Wie groß ist $\frac{b}{a}$?
(A) 2, **(B)** 1, **(C)** $\frac{5}{3}$, **(D)** $\frac{25}{9}$, **(E)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

23) Die Polizei ermittelt in einem Raubüberfall. Die fünf Verdächtigen – darunter befinden sich sicherlich der Täter und vielleicht auch einer oder mehrere seiner Komplizen – sagen Folgendes aus: A:“B ist der Täter. D ist einer der Komplizen.“ B: „E ist unschuldig. A ist einer der Komplizen.“ C:“ E ist der Täter. D ist unschuldig.“ D: „Der Täter ist sicher E. A war sein Komplize.“ E:“ A war einer der Komplizen. C ist der Täter.“ Man weiß, dass der Täter immer lügt; die eventuellen Komplizen machen aus Angst einmal eine wahre, einmal eine falsche Aussage; die unschuldigen Personen sagen immer die Wahrheit. Wie viele Komplizen gibt es?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** es ist nicht bestimmbar.

24) Bei einer Folge aus 2011 Zahlen bezeichnen wir das n-te Folgenglied mit a_n. Bestimme die letzten vier Ziffern von a_{2011}, wenn $a_1 = 1$ und für alle $n \ge 2$ gilt: $a_n = a_{n-1}(3n+1)$.
(A) 0000, **(B)** 3400, **(C)** 6000, **(D)** 6031, **(E)** 6034.

25) Der König Sowieso befindet sich in der Mitte eines Schachbretts mit 3 Zeilen („Reihen“) und 3 Spalten („Linien). Wie viele verschiedene Wege, die sich aus 3 Zügen zusammensetzen, sind für König Sowieso auf diesem Schachbrett möglich? [Der König macht einen Zug, indem er von einem Feld auf ein anderes rückt, das zumindest einen Eckpunkt gemeinsam hat.]
(A) 36, **(B)** 54, **(C)** 84, **(D)** 121, **(E)** 168.